

**Polynomiale und rationale
Tschebyscheff - Approximation
in der komplexen Ebene**

von
Volker Klotz
aus
Bochum

1974 № 381

Polynomiale und rationale Tschebyscheff - Approximation in der komplexen Ebene

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Volker Klotz

aus

Bochum

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 26.9.1974

Dekan: Professor Dr. J. Christiansen
Erstberichterstatte: Professor Dr. G. Meinardus
Zweitberichterstatte: Professor Dr. H. Berens

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0. Einleitung	5
1. Grundlagen	8
2. Ein hinreichendes Kriterium	11
3. Ein Kriterium für die strenge Eindeutigkeit der Minimallösung	17
4. Gewisse explizite Minimallösungen	24
5. Ein weiteres hinreichendes Kriterium	39
6. Ein Abstiegsverfahren zur Ermittlung von polynomialen Minimallösungen bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe	44
7. Ein Abstiegsverfahren zur Konstruktion von polynomialen Minimallösungen bzgl. einer Punktmenge des Einheitskreises	55
8. Ein Aufstiegsverfahren zur Ermittlung von polynomialen Minimallösungen bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe	64
9. Ein hinreichendes Kriterium für rationale Approximation	82
Literaturverzeichnis	91

0. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das folgende Approximationsproblem behandelt: Eine Funktion $f \in H(B_E)$ soll im Sinne der Tschebyscheff-Norm durch ein Polynom aus V_n auf der abgeschlossenen Einheitskreis-Scheibe B_E möglichst gut approximiert werden. Hierbei ist $H(B_E)$ die Klasse der auf B_E stetigen und im Innern des Einheitskreises E holomorphen Funktionen f und V_n die Menge der komplexwertigen Polynome mit Höchstgrad n . Da V_n die Haarsche Bedingung erfüllt, ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieser Aufgabe gesichert. Weiter ist auf Grund des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen dieses Problem äquivalent mit der Aufgabe, das Polynom bester Approximation an f aus V_n bzgl. des Einheitskreises E zu ermitteln.

Bei der Approximation einer auf einem kompakten Intervall stetigen, reellen Funktion f durch reellwertige Polynome vom Höchstgrad n im Sinne der Tschebyscheff-Norm wird die Minimallösung $\tilde{p}$ elegant durch den sogenannten Alternantensatz charakterisiert, der besagt, daß die Fehlerfunktion $f - \tilde{p}$ ihr Betragsmaximum mindestens $n+2$ mal abwechselnd mit positivem und negativem Vorzeichen annimmt. Im zweiten Kapitel wird gezeigt, daß bei der Approximation an Funktionen $f \in H(B_E)$ durch Polynome aus V_n bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe bei vorgegebenem $p^* \in V_n$ ein vergleichbares alternierendes Verhalten der Fehlerfunktion $f - p^*$ ein hinreichendes Kriterium dafür ist, daß p^* die gesuchte Minimallösung ist. Ist eine Funktion $f \in H(B_E)$ vorgegeben und besitzt die Minimallösung $p^* \in V_n$ an f die obige Eigenschaft, dann ist p^* sogar - und das ist die Hauptaussage des dritten Kapitels - streng eindeutig. Es existiert also eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $p \in V_n$ die Beziehung

$$\|f - p\| \geq \|f - p^*\| + c \cdot \|p^* - p\|$$

gilt.

Al'per [1] gab explizit die polynomiale Minimallösung an die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z - A}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad |A| > 1,$$

bezüglich der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe an. Mit dieser Aussage ist aber unter Verwendung der Partialbruchzerlegung die

Minimallösung $p \in V_n$ an rationale Funktionen der Gestalt

$$\tilde{f}(z) = \frac{q(z)}{z - A} \quad , \quad A \in \mathbb{C} \quad , \quad |A| > 1 \quad ,$$

für beliebige $q \in V_m$ anzugeben, wenn nur $n \geq m-1$ gilt. Diese Aussage wird im vierten Kapitel mit Hilfe eines anderen Zugangs hergeleitet, und es werden Verallgemeinerungen dieser Aussage angegeben. So wird beispielsweise die polynomiale Minimallösung aus V_n an rationale Funktionen der Form

$$q(z) = \frac{q(z)}{(z-A)(z-B)} \quad , \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad |A| > 1, \quad |B| > 1, \quad q \in V_m, \quad n \geq m-2,$$

unter der Voraussetzung explizit dargestellt, daß die Koeffizienten von q gewissen Bedingungen genügen. Es zeigt sich, daß die in diesem Kapitel angegebenen Minimallösungen an gewisse rationale Funktionen der hinreichenden Bedingung aus Kapitel 2 genügen.

Sei B ein kompakter Raum, $C(B)$ der lineare Teilraum der auf B stetigen komplexwertigen Funktionen und V ein linearer Teilraum von $C(B)$ der Dimension $n+1$, der die Haarsche Bedingung erfüllt, dann führte Meinardus [11] die Ermittlung der Minimallösung $h \in V$ an eine Funktion $f \in C(B)$ auf einer Menge von $n+2$ Punkten aus B , ähnlich wie im reellen Fall, auf ein Interpolationsproblem zurück. Ausgehend von dieser Aussage wird im fünften Kapitel ein weiteres hinreichendes Kriterium für die polynomiale Minimallösung an Funktionen $f \in H(B_E)$ bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe angegeben.

In Kapitel 6 wird ein konvergentes Abstiegsverfahren angegeben, das iterativ das Polynom bester Approximation an Funktionen $f \in H(B_E)$ auf B_E ermittelt. Dieses Verfahren wird im siebten Kapitel in der Weise modifiziert, daß die polynomiale Minimallösung an Funktionen $f \in H(B_E)$ auf einer diskreten Punktmenge des Einheitskreises, die mehr als $n+2$ paarweise verschiedene Punkte enthält, iterativ berechnet wird. In beiden Verfahren wird in jedem Iterationsschritt ein Polynom

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^n (a_j + i \cdot b_j) z^j \quad , \quad a_j, b_j \in \mathbb{R} \quad ,$$

ermittelt, das bzgl. einer gewissen Punktmenge M_k des Einheitskreises eine Abstiegsrichtung für die aktuelle Fehlerfunktion $f - p_k$ darstellt. Dieses geschieht durch Lösung des linearen Optimierungs-

problems:

Maximiere die Zahl μ unter den Nebenbedingungen

$$\operatorname{Re}\{(\overline{f(z)} - p_k(z))q_k(z)\} - \mu \geq 0 \quad \text{für } z \in M_k$$

und

$$|a_j| \leq 1, \quad |b_j| \leq 1 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n.$$

Abstiegsverfahren, denen dieser Gedanke zu Grunde liegt, entwickelten beispielsweise Krabs [8] bzw. Blatt [2] zur Ermittlung der Minimallösung bei gewissen nichtlinearen Approximationsproblemen auf diskreten Mengen bzw. bei linearen Approximationsproblemen bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung.

Ein weiteres konvergentes Verfahren, ein Aufstiegsverfahren, wird in Kapitel 8 angegeben. Einige Beispiele, die mit Hilfe dieses Verfahrens an der Rechenanlage des Rechenzentrums der Universität Erlangen-Nürnberg durchgerechnet wurden, sollen das numerische Verhalten des Verfahrens illustrieren.

Das neunte Kapitel befaßt sich mit rationaler Approximation an Funktionen $f \in H(B_E)$ bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Es wird ein hinreichendes Kriterium für die rationale Minimallösung angegeben und gezeigt, daß unter einer zusätzlichen Voraussetzung die so charakterisierte Minimallösung eindeutig ist. Schließlich werden explizit rationale Minimallösungen an Funktionen aus $H(B_E)$ angegeben, die dem hinreichenden Kriterium und der zusätzlichen Forderung genügen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit können, teilweise in geringfügig modifizierter Form, übernommen werden für polynomiale bzw. rationale Approximation im Tschebyscheffschen Sinne an

Funktionen f , die auf der abgeschlossenen Kreisscheibe B_R mit beliebigem Radius $R > 0$ stetig und im Innern von B_R holomorph sind, bzgl. dieser abgeschlossenen Kreisscheibe B_R ,

und an

auf dem Einheitskreis stetige Funktionen f bzgl. des Einheitskreises.

1. Grundlagen

Es sei B ein kompakter Raum und $C(B)$ die Menge der auf B stetigen komplexwertigen Funktionen. In $C(B)$ betrachten wir die Tschebyscheff-Norm

$$\|f\| = \max_{z \in B} |f(z)| \quad .$$

$\tilde{z} \in B$ heißt Extrempunkt von f , wenn

$$|f(\tilde{z})| = \|f\|$$

gilt. Sei V ein linearer Teilraum von $C(B)$, so suchen wir zu vorgegebenem $f \in C(B)$ ein $v_0 \in V$ mit

$$\|f - v_0\| \leq \|f - v\|$$

für alle $v \in V$, also eine Minimallösung mit der Abweichung

$$\rho_V(f) = \inf_{v \in V} \|f - v\| \quad .$$

Definition 1.1:

Ein linearer Teilraum $V \subset C(B)$ der Dimension n erfüllt die Haarsche Bedingung, wenn jede Funktion $v \in V$, $v \neq 0$, höchstens $n-1$ Nullstellen in B besitzt.

Satz 1.1 (Haar, Kolmogoroff):

Der Teilraum V mit $\dim V = n$ erfülle die Haarsche Bedingung.

Dann gibt es für jedes $f \in C(B)$ genau eine Minimallösung bzgl. V .

Ein Hilfsmittel des Beweises dieses Satzes (siehe z.B. Meinardus[11]) ist der wichtige

Satz 1.2 (Kolmogoroff):

Eine Funktion v_0 ist genau dann Minimallösung an bzgl. V , wenn für jede Funktion $v \in V$ die Ungleichung

$$\min_{z \in D} \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - \overline{v_0(z)})v(z) \leq 0$$

besteht. Hier ist D die Menge der Extrempunkte von $f - v_0$.

Im Komplexen besagt dieses Kriterium, daß es keine Funktion $v \in V$ gibt, für die bzgl. aller Extrempunkte

$$|\arg\{f(z) - v_0(z)\} - \arg\{v(z)\}| < \frac{\pi}{2}$$

gilt, wenn v_0 Minimallösung ist und umgekehrt. Denn mit

$$f(z) - v_0(z) = r(\cos\phi + i\sin\phi) \quad , \quad r > 0,$$

und

$$v(z) = R(\cos\psi + i\sin\psi) \quad , \quad R > 0,$$

gilt

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z) - v_0(z)})v(z) = rR \cdot \cos(\phi - \psi) \quad ,$$

d.h.

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z) - v_0(z)})v(z) \leq 0 \iff \frac{\pi}{2} \leq \phi - \psi \leq \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi} .$$

Im folgenden sei $B_E = \{z; |z| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $H(B_E)$ die Menge der Funktionen f , die im Innern von B_E holomorph und auf $E := \operatorname{rd} B_E$ stetig sind. Weiterhin sei $V_n \subset H(B_E)$ der lineare Teilraum der komplexwertigen Polynome p_n von höchstens n 'tem Grad. V_n besitzt die Dimension $n+1$ und erfüllt die Haarsche Bedingung. Somit gibt es nach Satz 1.1 für jedes $f \in H(B_E)$ genau eine Minimallösung auf B_E bzgl. V_n .

Mit $f \in H(B_E)$ und $p_n \in V_n$ ist aber

$$\eta = (f - p_n) \in H(B_E) \quad ,$$

also holomorph im Innern von B_E und stetig auf $\operatorname{rd} B_E$. Mit Hilfe des Maximumprinzips (siehe z.B. Cartan[3])

Satz 1.3:

Ist eine Funktion f in einer abgeschlossenen Kreisscheibe stetig und im Innern der Kreisscheibe holomorph, so wird das Maximum von $|f|$ auf dem Rande der Kreisscheibe angenommen.

ist sofort die folgende Folgerung zu ziehen:

Satz 1.4:

Es sei $f \in H(B_E)$. $\tilde{p}_n \in V_n$ ist genau dann das Polynom bester Approximation an f auf B_E bzgl. V_n , wenn $\tilde{p}_n$ das Polynom bester Approximation an f auf E bzgl. V_n ist.

Denn Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{p}_n$ sind nach dem Vorhergehenden gesichert und es gilt

$$\|f - \tilde{p}_n\|_E = \|f - \tilde{p}_n\|_{B_E} \leq \|f - p_n\|_E = \|f - p_n\|_{B_E}$$

für alle $p_n \in V_n$.

Wir können uns also, um das Polynom p_n bester Approximation an eine vorgegebene Funktion $f \in H(B_E)$ auf B_E bzgl. V_n zu finden, darauf beschränken, das Polynom p_n bester Approximation an f auf $E = \text{rd } B_E$ bzgl. V_n zu suchen. Weiterhin ist offensichtlich, daß die Ergebnisse dieser Untersuchungen sofort zu verallgemeinern sind auf beliebige abgeschlossene Kreisscheiben

$$B_k = \{z; |z - z| \leq R, z \in \mathbb{C}, R > 0\}$$

und der Menge $H(B_k)$ der Funktionen g , die auf B_k stetig und im Innern von B_k holomorph sind.

2. Ein hinreichendes Kriterium

Gegeben sei ein Intervall $[a,b] \in \mathbb{R}$. Weiter sei $C[a,b]$ der Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a,b]$ und $W = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein Haarscher Teilraum von $C[a,b]$ der Dimension n . Für $f \in C[a,b]$ ist dann die Funktion $\tilde{v} \in W$ bester Approximation an f in eleganter Weise zu charakterisieren durch

Satz 2.1 (Alternantensatz):

$\tilde{v} \in W$ ist genau dann die Minimallösung an f auf $[a,b]$ bzgl. W , wenn $n+1$ Punkte

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

existieren mit

$$(1) \quad |f(x_i) - \tilde{v}(x_i)| = \|f - \tilde{v}\|, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$(2) \quad (f(x_i) - \tilde{v}(x_i)) + (f(x_{i+1}) - \tilde{v}(x_{i+1})) = 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

(Beweis vgl. z.B. Meinardus [11]).

Betrachten wir wieder den Raum $H(B_E)$ der im Innern der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe holomorphen und auf $\text{rd } B_E$ stetigen Funktionen f . Im folgenden werden wir ein hinreichendes Kriterium angeben, wann ein komplexwertiges Polynom $p_n \in V_n$ Minimallösung an eine vorgegebene Funktion $f \in H(B_E)$, $f \notin V_n$, bzgl. $\text{rd } B_E$, und damit auf Grund von Satz 1.4 bzgl. B_E , ist. Es wird sich zeigen, daß ein vergleichbares alternierendes Verhalten der Fehlerfunktion $\eta = f - p_n$ ein hinreichendes Kriterium dafür ist, daß p_n das Polynom bester Approximation aus V_n an f bzgl. B_E ist.

Hierzu benötigen wir die folgenden Hilfssätze:

Lemma 2.1:

Es sei $T(\phi) \not\equiv 0$ eine trigonometrische Summe der Form

$$T(\phi) = a_0 + \sum_{v=1}^n (a_v \cdot \cos v\phi + b_v \cdot \sin v\phi).$$

Dann besitzt $T(\phi)$ maximal $2n$ Nullstellen.

(Beweis: vgl. z.B. Zygmund [20]).

Folgerung 2.1:

Eine Summe

$$S(\phi) = \sum_{v=0}^n (a_v \cos \frac{2v+1}{2} \phi + b_v \sin \frac{2v+1}{2} \phi)$$

besitzt maximal $2n+1$ Nullstellen.

Beweis:

$S(\phi)$ kann dargestellt werden als

$$S(\phi) = \sum_{v=-n-1}^n c_v \cdot e^{i \frac{2v+1}{2} \phi}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S(\phi) \cdot e^{i \frac{2n+1}{2} \phi} &= \sum_{\lambda=-n-1}^n c_{\lambda} \cdot e^{i(n+1+\lambda)\phi} = \sum_{\lambda=0}^{2n+1} c_{\lambda-n-1} \cdot e^{i\lambda\phi} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{2n+1} c_{\lambda-n-1} \cdot z^{\lambda}(\phi) = p_{2n+1}(z) \end{aligned}$$

wenn $e^{i\lambda\phi} = z^{\lambda}(\phi)$ gesetzt wird.

p_{2n+1} ist ein Polynom vom Grad $2n+1$ in z . Ist $\phi = \tilde{\phi}$ eine Nullstelle der Ordnung r von $S(\phi)$, dann ist $\tilde{z} = z(\tilde{\phi})$ eine Nullstelle der Ordnung r von p_{2n+1} und umgekehrt. Hieraus folgt sofort die zu beweisende Aussage.

Lemma 2.2:

Es sei $G(r) = r \cdot e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < \pi$, eine Gerade durch den Ursprung und q_n ein Polynom aus V_n . Durchläuft z die Werte des Einheitskreises, sei also $z = z(\phi) = \cos \phi + i \cdot \sin \phi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, dann besitzt

$$H(\phi, r) = q_n(z(\phi)) - G(r)$$

maximal $2n$ Nullstellen für $(\phi, r) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Beweis:

Setzen wir

$$q_n(z(\phi)) = \sum_{v=0}^n (a_v + i \cdot b_v) (\cos v\phi + i \cdot \sin v\phi) = u(\phi) + i \cdot v(\phi)$$

mit

$$u(\phi) = \sum_{v=0}^n (a_v \cos v\phi - b_v \sin v\phi)$$

und

$$v(\phi) = \sum_{v=0}^n (b_v \cos v\phi + a_v \sin v\phi) ,$$

so folgt

$$\arg\{q_n(z(\phi))\} = \arctan \frac{v(\phi)}{u(\phi)} \mod \pi \quad \text{für } v(\phi) \neq 0 \neq u(\phi) ,$$

und

$$\arg\{r \cdot e^{i\theta}\} = \theta \mod \pi \quad \text{für } r \neq 0 .$$

Wir machen die folgenden Fallunterscheidungen:

- (1) $q_n(z(\phi)) \neq 0$ für $0 \leq \phi < 2\pi$ (insbesondere kann also $r \neq 0$ vorausgesetzt werden):

Wir setzen o.B.d.A. $\theta = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} H(\phi, r) = 0 & \iff \arg\{q_n(z(\phi))\} = \arctan \frac{v(\phi)}{u(\phi)} = 0 \mod \pi \\ & \iff v(\phi) = 0 . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $u(\phi) \neq 0$ für $v(\phi) = 0$. Somit folgt aus Lemma 2.1 die Behauptung.

- (2) Es existiert mindestens ein $\tilde{\phi}$, $0 \leq \tilde{\phi} < 2\pi$, mit $q_n(z(\tilde{\phi})) = 0$:

Bei Verwendung der Produktdarstellung kann q_n - nach eventueller Umindizierung - dargestellt werden in der Form

$$q_n(z(\phi)) = \alpha \cdot (z(\phi) - \gamma_1)^{k_1} \dots (z(\phi) - \gamma_s)^{k_s} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} (z(\phi) - \beta_v) ,$$

$$\alpha, \beta_v, \gamma_v \in \mathbb{C} ,$$

wobei $|\beta_v| \neq 1$, $v = 1, 2, \dots, n-k$, $|\gamma_v| = 1$, $v = 1, 2, \dots, s$,
und

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s = k$$

ist. Hierbei nehmen wir o.B.d.A. an, daß q_n von genau n 'tem Grad ist.

Setzen wir $\chi_v = \arg\{\gamma_v\}$, $v = 1, 2, \dots, s$, so gilt

$$(z(\phi) - \gamma_v)^{k_v} = (+2i)^{k_v} \cdot e^{i \cdot \frac{k_v(\chi_v + \phi)}{2}} \cdot (\sin \frac{\phi - \chi_v}{2})^{k_v}.$$

Somit kann q_n dargestellt werden als

$$q_n(z(\phi)) = (\sin \frac{\phi - \chi_1}{2})^{k_1} \cdot (\sin \frac{\phi - \chi_2}{2})^{k_2} \dots (\sin \frac{\phi - \chi_s}{2})^{k_s} \cdot T(\phi)$$

mit

$$T(\phi) = (+2i)^k \cdot \prod_{v=1}^s e^{i \cdot \frac{k_v(\chi_v + \phi)}{2}} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} (z(\phi) - \beta_v),$$

und es gilt $T(\phi) \neq 0$ für $0 \leq \phi < 2\pi$.

(i) $r = 0$:

Aus der obigen Darstellung für q_n folgt

$$\begin{aligned} H(\phi, r) = 0 &\iff (\sin \frac{\phi - \chi_1}{2})^{k_1} \dots (\sin \frac{\phi - \chi_s}{2})^{k_s} = 0 \\ &\iff \phi = \chi_v \pmod{2\pi}, \quad v = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Bei $\phi = \chi_v$ liegt für $v = 1, 2, \dots, s$ eine Nullstelle von $H(\phi, r)$. q_n besitzt also insgesamt s Schnittpunkte mit der Geraden $G(r)$ im Nullpunkt.

(ii) $r \neq 0$:

Es folgt

$$\begin{aligned} H(\phi, r) = 0 &\iff \arg\{q_n(z(\phi))\} = \arg\{r \cdot e^{i\theta}\} \\ &\iff \arg\left\{(\sin \frac{\phi - \chi_1}{2})^{k_1} \dots (\sin \frac{\phi - \chi_s}{2})^{k_s}\right\} + \arg\{T(\phi)\} = \arg\{r \cdot e^{i\theta}\} \\ &\iff \arg\{T(\phi)\} = \theta \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

T kann aber - mit eindeutig bestimmten $\delta_v \in \mathbb{C}$ - dargestellt werden in der Form

$$T(\phi) = \sum_{v=0}^{n-k} \delta_v (\cos v\phi + i \cdot \sin v\phi),$$

falls k gerade, bzw.

$$T(\phi) = \sum_{v=0}^{n-\frac{k+1}{2}} \delta_v \left(\cos \frac{2v+1}{2} \phi + i \cdot \sin \frac{2v+1}{2} \phi \right),$$

falls k ungerade.

Bei analogem Vorgehen wie unter (1) erhält man bei Verwendung des Lemma 2.1, falls k gerade, bzw. bei Verwendung der Folgerung 2.1, falls k ungerade, daß $H(\phi, r)$ für $r \neq 0$ maximal $2n-k$ Nullstellen besitzt. Berücksichtigung der Aussage von (i) ergibt wieder die Behauptung.

Satz 2.2:

Es sei $f \in H(B_E)$, $f \notin V_n$, und $\tilde{p}_n \in V_n$. Existieren $2n+2$ Werte ϕ_μ ,

$$0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{2n+2} < 2\pi,$$

so daß mit $z_\mu = z(\phi_\mu) = \cos \phi_\mu + i \cdot \sin \phi_\mu$

$$(1) \quad |f(z_\mu) - \tilde{p}_n(z_\mu)| = \|f - \tilde{p}_n\|, \quad \mu = 1, 2, \dots, 2n+2,$$

und mod 2π

$$(2) \quad \arg\{f(z_{\mu+1}) - \tilde{p}_n(z_{\mu+1})\} - \arg\{f(z_\mu) - \tilde{p}_n(z_\mu)\} = \pi$$

$$\mu = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

gilt, dann ist $\tilde{p}_n$ das Polynom bester Approximation an f auf B_E bzgl. V_n .

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $\tilde{p}_n$ nicht das Polynom bester Approximation an f auf B_E bzgl. V_n ist. Dann existiert nach dem Kolmogoroff-Kriterium mindestens ein Polynom $q_n \in V_n$, so daß für $\mu = 1, 2, \dots, 2n+2$

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_\mu) - \tilde{p}_n(z_\mu)}) q_n(z_\mu) > 0$$

gilt. Setzen wir

$$\arg\{f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)\} = \theta,$$

so muß mod 2π gelten

$$\theta - \frac{\pi}{2} < \arg\{q_n(z_{2\mu-1})\} < \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n+1,$$

und

$$\theta + \frac{\pi}{2} < \arg\{q_n(z_{2\mu})\} < \theta + \frac{3\pi}{2}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n+1.$$

Diese Bedingung kann q_n aber nur erfüllen, wenn q_n - im Widerspruch zu Lemma 2.2 - mindestens $2n+1$ Schnittpunkte mit der Geraden

$$G(r) = r \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

besitzt. $\tilde{p}_n$ ist tatsächlich das Polynom bester Approximation an f auf B_E bzgl. V_n .

3. Ein Kriterium für die strenge Eindeutigkeit der Minimallösung:

Sei B wieder ein kompakter Raum und $C(B)$ die Menge der auf B stetigen komplexwertigen Funktionen. Weiter sei $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein linearer Teilraum von $C(B)$, der die Haarsche Bedingung erfüllt. Für eine beliebige Funktion $f \in C(B)$ gilt dann der

Satz 3.1:

$v \in V$ ist genau dann die Minimallösung an f , wenn der Nullvektor in der konvexen Hülle der Menge

$$S = \{(\overline{f(z) - v(z)})b(z); z \in M(v)\}$$

liegt, wobei $M(v) = \{z; z \in B, |f(z) - v(z)| = \|f - v\|\}$ die Menge der Extrempunkte von $f - v$ und

$$b(z) = (v_1(z), v_2(z), \dots, v_n(z)) \in \mathbb{C}^n$$

ist.

(Cheney [4] bewies diesen Satz für den reellen Fall und gab auch die Möglichkeit der Verallgemeinerung für den komplexen Fall an).

Zu dem Beweis benötigen wir den

Satz 3.2:

Ist M eine Teilmenge eines n -dimensionalen komplexen Raumes, so läßt sich jeder Punkt von $\text{conv } M$, der konvexen Hülle von M , als konvexe Linearkombination von höchstens $2n+1$ Punkten von M ausdrücken.

(Beweis vgl. z.B. Cheney [4]).

Beweis von Satz 3.1:

(1) Annahme: $0 \notin \text{conv } S$:

$M(v)$ ist kompakt. Dann ist aber S und damit auch $\text{conv } S$ kompakt. Setzen wir

$$(\overline{f(z) - v(z)})v_k(z) = a_k(z) + i \cdot b_k(z) \quad , \quad a_k(z), b_k(z) \in \mathbb{R} \quad ,$$

und definieren

$$\tilde{S} = \{\tilde{z} = (a_1(z), b_1(z), \dots, a_n(z), b_n(z)); z \in M(v)\} \quad ,$$

dann ist $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^{2n}$ kompakt, ebenso $\text{conv } \tilde{S}$, und es gilt $0 \notin \text{conv } \tilde{S}$.

Dann existiert aber (Trennungssatz für konvexe Mengen) ein Vektor

$$c = (c_1, d_1, \dots, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

mit $(c, \tilde{s}) > 0$ für alle $\tilde{s} \in \tilde{S}$, wobei $(c, \tilde{s})$ das skalare Produkt der beiden Vektoren c und $\tilde{s}$ sei. Danach ist für $z \in M(v)$

$$\begin{aligned} (c, \tilde{s}) &= \sum_{k=1}^n c_k a_k(z) + \sum_{k=1}^n d_k b_k(z) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (c_k + i \cdot d_k) (a_k(z) - i \cdot b_k(z)) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \{ \overline{(\tilde{f}(z) - v(z))} \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k(z) \} > 0, \end{aligned}$$

wenn $\alpha_k = c_k + i \cdot d_k$ gesetzt wird. Nach Satz 1.2 ist v dann aber wegen

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k(z) \right) \in V$$

keine Minimallösung.

(2) $0 \notin \operatorname{conv} S$:

Nach Satz 3.2 gibt es $m \leq 2n+1$ Vektoren in S

$$\overline{(\tilde{f}(z_1) - v(z_1))} b(z_1), \dots, \overline{(\tilde{f}(z_m) - v(z_m))} b(z_m),$$

so daß

$$\sum_{i=1}^m c_i \overline{(\tilde{f}(z_i) - v(z_i))} b(z_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m c_i = 1, \quad c_i > 0,$$

gilt.

Für jedes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ ist dann aber

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\alpha, \sum_{i=1}^m c_i \overline{(\tilde{f}(z_i) - v(z_i))} b(z_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ c_i (\tilde{f}(z_i) - v(z_i)) \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{v_k(z_i)} \right\}, \end{aligned}$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m c_i \cdot \operatorname{Re} \{ (\tilde{f}(z_i) - v(z_i)) \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{v_k(z_i)} \} \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \cdot \operatorname{Re} \{ \overline{(\tilde{f}(z_i) - v(z_i))} \cdot \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \cdot v_k(z_i) \}. \end{aligned}$$

Da $\sum_{i=1}^m c_i = 1$ und $c_i > 0$ ist, folgt

$$\min_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Re} \{ \overline{f(z_i) - v(z_i)} \cdot \sum_{k=1}^n \overline{a_k} \cdot v_k(z_i) \} \leq 0, \quad ,$$

also insbesondere

$$\min_{z \in M(v)} \operatorname{Re} \{ \overline{f(z) - v(z)} \cdot \sum_{k=1}^n \overline{a_k} \cdot v_k(z) \} \leq 0, \quad ,$$

und damit - wiederum nach Satz 2.1 - : v ist Minimallösung.

Es sei wieder $B = B_E$, $V = V_n$ und $f \in H(B_E)$ eine beliebig vorgegebene Funktion. Die Minimallösung p_n an f auf B_E bzgl. V_n ist, wie wir im ersten Kapitel gesehen hatten, eindeutig. Erfüllt p_n die hinreichende Bedingung des Satzes 2.2, dann ist p_n sogar im Cheney'schen Sinn "streng eindeutig".

Definition 3.1:

Die Minimallösung $\tilde{p}_n$ an $f \in H(B_E)$ auf B_E bzgl. V_n heißt streng eindeutig, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so daß für alle $p_n \in V_n$

$$\|f - p_n\| \geq \|f - \tilde{p}_n\| + c \cdot \|\tilde{p}_n - p_n\|$$

gilt.

Zunächst beweisen wir das

Lemma 3.1:

Es sei $f \in H(B_E)$ und $\tilde{p}_n$ sei die Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n . Existieren $2n+1$ Werte ϕ_μ , $0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{2n+1} < 2\pi$, so daß mit $z_\mu = z(\phi_\mu)$

$$(3a) \quad |f(z_\mu) - \tilde{p}_n(z_\mu)| = \|f - \tilde{p}_n\| > 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

und mod 2π

$$(3b) \quad \arg\{f(z_{\mu+1}) - p_n(z_{\mu+1})\} - \arg\{f(z_\mu) - p_n(z_\mu)\} = \pi$$

$$\mu = 1, 2, \dots, 2n, \quad ,$$

gilt, dann gibt es eine Konstante $c > 0$ und ein z_i mit $1 \leq i \leq 2n+1$, so daß für alle $p_n \in V_n$ die Beziehung

$$\operatorname{Re} \{ \overline{f(z_i) - \tilde{p}_n(z_i)} \} (\tilde{p}_n(z_i) - p_n(z_i)) \geq c \cdot \|\tilde{p}_n - p_n\|$$

erfüllt ist.

Beweis:

Sei

$$S = \{ (\overline{f(z_v)} - \overline{p_n(z_v)}) (1, z_v, z_v^2, \dots, z_v^n), v = 1, 2, \dots, 2n+1 \},$$

dann liegt nach Satz 4.1 der Nullvektor in $\text{conv } S$. Es existieren also $2n+1$ reelle Zahlen $\lambda_v > 0$, $v = 1, 2, \dots, 2n+1$, so daß

$$\sum_{v=1}^{2n+1} \lambda_v \cdot (\overline{f(z_v)} - \overline{p_n(z_v)}) \cdot z_v^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

gilt.

Aus (3a) und (3b) folgt mit

$$\|f - \tilde{p}_n\| = r > 0 \quad \text{und} \quad \arg\{f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)\} = -\theta$$

für $v = 1, 2, \dots, 2n+1$

$$\overline{f(z_v)} - \overline{p_n(z_v)} = (-1)^v \cdot r \cdot e^{i\theta} = \sigma_v \cdot e^{i\theta},$$

wobei $\sigma_v = (-1)^v \cdot r$ gesetzt ist.

Sei $q_n \in V_n$ ein beliebiges Polynom mit $\|q_n\| = 1$, so folgt mit den vorhergehenden Festsetzungen und mit $\tilde{q}_n = e^{i\theta} \cdot q_n$

$$\sum_{v=1}^{2n+1} \sigma_v \cdot \lambda_v \cdot \tilde{q}_n(z_v) = 0$$

und insbesondere

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{v=1}^{2n+1} \sigma_v \cdot \lambda_v \cdot \tilde{q}_n(z_v)\right\} = \sum_{v=1}^{2n+1} (\lambda_v \cdot \operatorname{Re}\{\sigma_v \cdot \tilde{q}_n(z_v)\}) = 0.$$

$\operatorname{Re}\{\tilde{q}_n\}$ kann aber als trigonometrische Summe der Form

$$\operatorname{Re}\{\tilde{q}_n(z(\phi))\} = \sum_{\mu=0}^n (\gamma_\mu \cdot \cos \mu\phi + \delta_\mu \cdot \sin \mu\phi)$$

mit eindeutig bestimmten $\gamma_\mu, \delta_\mu \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, besitzt also nach Lemma 2.1 maximal $2n$ Nullstellen: Die reellen Zahlen $\operatorname{Re}\{\sigma_v \cdot \tilde{q}_n(z(\phi_v))\}$ besitzen nicht alle den Wert 0. Insbesondere existiert - wegen $\lambda_v > 0$ für $v = 1, 2, \dots, 2n+1$ - mindestens ein j , $1 \leq j \leq 2n+1$, mit

$$\operatorname{Re}\{\sigma_j \cdot \tilde{q}_n(z(\phi_j))\} > 0.$$

Hieraus folgt, daß

$$\max_v \operatorname{Re}\{\sigma_v \cdot \tilde{q}_n(z(\phi_v))\} \quad , \quad v = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

eine von q_n abhängige positive Funktion ist und somit die Zahl

$$c = \min_{\|q_n\|=1} \max_v \operatorname{Re}\{\sigma_v \cdot \tilde{q}_n(z(\phi_v))\}$$

als Minimum einer stetigen positiven Funktion auf einer kompakten Menge positiv ist.

Setzen wir

$$q_n = \frac{\tilde{p}_n - p_n}{\|\tilde{p}_n - p_n\|} \quad ,$$

so ist $\|q_n\| = 1$ und mit

$$\begin{aligned} \sigma_v \cdot \tilde{q}_n(z_v) &= \sigma_v \cdot e^{i\theta} \cdot \frac{\tilde{p}_n(z_v) - p_n(z_v)}{\|\tilde{p}_n - p_n\|} \\ &= \overline{(f(z_v) - \tilde{p}_n(z_v))} \cdot \frac{\tilde{p}_n(z_v) - p_n(z_v)}{\|\tilde{p}_n - p_n\|} \end{aligned}$$

folgt: Es existiert mindestens ein i , $1 \leq i \leq 2n+1$, so daß

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{(f(z_i) - \tilde{p}_n(z_i))} \cdot \frac{\tilde{p}_n(z_i) - p_n(z_i)}{\|\tilde{p}_n - p_n\|}\right\} \geq c \quad ,$$

also

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{(f(z_i) - \tilde{p}_n(z_i))} \cdot (\tilde{p}_n(z_i) - p_n(z_i))\right\} \geq c \cdot \|\tilde{p}_n - p_n\|$$

gilt.

Mit Hilfe dieses Lemmas ist aber sofort der folgende Satz zu beweisen.

Satz 3.2:

Es sei $f \in H(B_E)$ und $\tilde{p}_n \in V_n$ die Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n . Existieren $2n+1$ Werte ϕ_μ mit $0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{2n+1} < 2\pi$, die den Bedingungen (3a) und (3b) genügen, oder ist $f \in V_n$, dann ist $\tilde{p}_n$ streng eindeutig.

Beweis:

Wir machen die folgenden beiden Fallunterscheidungen:

$$(1) \|f - \tilde{p}_n\| = 0:$$

Dann gilt

$$\|f - p_n\| \geq \|\tilde{p}_n - p_n\| - \|f - \tilde{p}_n\| = \|\tilde{p}_n - p_n\| ,$$

also $c = 1$.

$$(2) \|f - \tilde{p}_n\| > 0:$$

Dann existieren $2n+1$ komplexe Zahlen $z_\mu = z(\phi_\mu) \in E$, die den Bedingungen (3a) und (3b) genügen. Weiter existiert nach Lemma 4.1 ein z_1 , $1 \leq i \leq 2n+1$, und ein $\tilde{c} > 0$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)}) \cdot (\tilde{p}_n(z_1) - p_n(z_1)) = \tilde{c} \cdot \|\tilde{p}_n - p_n\| .$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \|f - p_n\| &\geq \frac{1}{\|f - \tilde{p}_n\|} \cdot \operatorname{Re}(\overline{f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)}) (f(z_1) - p_n(z_1)) \\ &= \frac{1}{\|f - \tilde{p}_n\|} \cdot \operatorname{Re}(\overline{f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)}) (f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)) + \\ &\quad + \frac{1}{\|f - \tilde{p}_n\|} \cdot \operatorname{Re}(\overline{f(z_1) - \tilde{p}_n(z_1)}) (\tilde{p}_n(z_1) - p_n(z_1)) \\ &\geq \|f - \tilde{p}_n\| + \frac{\tilde{c}}{\|f - \tilde{p}_n\|} \cdot \|\tilde{p}_n - p_n\| \\ &= \|f - \tilde{p}_n\| + c \cdot \|\tilde{p}_n - p_n\| . \end{aligned}$$

Es sei G die Menge der Funktionen $f \in H(B_E)$, deren Minimallösung aus V_n auf B_E durch die Beziehungen (3a) und (3b) charakterisiert werden. Dann ist der Operator T , der jeder Funktion $f \in G$ das Polynom p_n bester Approximation an auf B_E bzgl. V_n zuordnet, Lipschitz-stetig. Denn es gilt der

Satz 3.3:

Zu jeder Funktion $f \in G$ existiert ein $\lambda > 0$, so daß für alle $g \in G$ gilt

$$\|Tf - Tg\| \leq \lambda \cdot \|f - g\| .$$

Beweis:

Aus Satz 3.2 folgt

$$\|f - p_n\| \geq \|f - Tf\| + c \cdot \|Tf - p_n\|$$

und somit, $p_n = Tg$ gesetzt,

$$\begin{aligned} c \cdot \|Tf - Tg\| &\leq \|f - Tg\| - \|f - Tf\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - Tg\| - \|f - Tf\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - Tf\| - \|f - Tf\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - f\| + \|f - Tf\| - \|f - Tf\| \\ &= 2 \cdot \|f - g\| \quad . \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\|Tf - Tg\| = \lambda \cdot \|f - g\| \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2}{c} \quad .$$

4. Gewisse explizite Minimallösungen

In diesem Kapitel werden wir polynomiale Minimallösungen an gewisse Klassen von rationalen Funktionen explizit angeben. Hierzu zeigen wir den

Satz 4.1:

Es sei $f \in H(B_E)$. Existiert ein Polynom $p_n \in V_n$ mit

$$f(z) - p_n(z) = \sigma \cdot z^k \cdot \prod_{\mu=1}^m \frac{z - \bar{\beta}_\mu^{-1}}{z - \beta_\mu} \quad ,$$

$$\sigma \in \mathbb{C} \quad , \quad \beta_\mu \in \mathbb{C} \quad , \quad |\beta_\mu| > 1 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots, m \quad ,$$

und ist $k+m \geq n+1$, dann ist p_n das Polynom bester Approximation an f aus V_n bzgl. E und damit wegen $f \in H(B_E)$ auch bzgl. $H(B_E)$.

Weiter gilt

$$\rho_{V_n}(f) = \frac{|\sigma|}{|\beta_1| \cdot |\beta_2| \dots |\beta_m|} \quad .$$

Beweis:

Es ist

$$f(z) - p_n(z) = \sigma \cdot z^k \cdot \prod_{\mu=1}^m \frac{z - \bar{\beta}_\mu^{-1}}{z - \beta_\mu} = (-1)^m \cdot \frac{\sigma}{\beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_m} \cdot w(z)$$

mit

$$w(z) = z^k \cdot \prod_{\mu=1}^m \frac{z - \bar{\beta}_\mu^{-1}}{1 - \bar{\beta}_\mu^{-1} \cdot z} \quad .$$

Setzen wir

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\min_{\mu} |\beta_\mu| - 1) \quad , \quad \mu = 1, 2, \dots, m \quad ,$$

dann ist nach Voraussetzung $\varepsilon > 0$ und w ist holomorph in dem Kreisgebiet

$$K : |z| < 1 + \varepsilon \quad .$$

Insbesondere bildet w den Einheitskreis E auf den $(k+m)$ -mal durchlaufenen Einheitskreis ab. Es folgt für $z \in E$

$$|f(z) - p_n(z)| = \frac{|\sigma|}{|\beta_1| \dots |\beta_m|} \cdot |w(z)| = \frac{|\sigma|}{|\beta_1| \dots |\beta_m|} = \|f - p_n\|_E \quad .$$

Das heißt aber: Zu beliebig vorgegebenem θ mit $0 \leq \theta < 2\pi$ existieren genau $m+k$ Werte ϕ_μ und genau $m+k$ Werte $\tilde{\phi}_\mu$, $\mu = 1, 2, \dots, m+k$ mit $0 = \phi_1 < \tilde{\phi}_1 < \phi_2 < \tilde{\phi}_2 < \dots < \phi_{m+k} < \tilde{\phi}_{m+k} < 2\pi$, so daß mit $z = z(\phi) = e^{i\phi}$, also $z \in E$, gilt

$$|f(z(\phi_\mu)) - p_n(z(\phi_\mu))| = \|f - p_n\|_E \quad \text{und} \\ \arg\{f(z(\phi_\mu)) - p_n(z(\phi_\mu))\} = \theta \quad \text{mod } 2\pi,$$

bzw.

$$|f(z(\tilde{\phi}_\nu)) - p_n(z(\tilde{\phi}_\nu))| = \|f - p_n\|_E \quad \text{und} \\ \arg\{f(z(\tilde{\phi}_\nu)) - p_n(z(\tilde{\phi}_\nu))\} = \theta + \pi \quad \text{mod } 2\pi.$$

Da nach Voraussetzung $m+k \geq n+1$ ist, ist p_n nach Satz 2.2 tatsächlich Minimallösung an f und es gilt

$$\rho_{V_n}(f) = \|f - p_n\| = \frac{|\sigma|}{|\beta_1| \cdot |\beta_2| \cdot \dots \cdot |\beta_m|}.$$

Im folgenden sei

$$W_1^m = \{r_m; r_m(z) = \frac{p_m(z)}{q_1(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu z^\mu}{z - \beta}, \beta, \alpha_\mu \in \mathbb{C}, |\beta_\mu| > 1, m \geq 0\}$$

die Menge der auf B_E holomorphen rationalen Funktionen $r_m = \frac{p_m}{q_1}$. Dann gilt der

Satz 4.2:

Es sei $\tilde{r}_m \in W_1^m$ und $n \geq m-1$. Dann existiert genau ein Polynom $p_n \in V_n$ und ein $\sigma \in \mathbb{C}$, so daß die Beziehung

$$(4a) \quad \tilde{r}_m(z) - p_n(z) = \sigma \cdot z^n \cdot \frac{z - \bar{\beta}^{-1}}{z - \beta}$$

erfüllt ist.

Beweis:

Setzen wir

$$p_n(z) = \sum_{v=0}^n \gamma_v z^v,$$

so kann - wegen $z - \beta \neq 0$ für $z \in E$ - die Beziehung (4a) umgeformt werden zu

$$\sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu z^\mu - \sum_{v=0}^n \gamma_v (z - \beta) z^v = \sigma \cdot z^n \cdot (z - \bar{\beta}^{-1}).$$

Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem

$$A^{(n)} \cdot x = b^{(m)}$$

mit

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{\beta}^{-1} & \beta & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \dots \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad b^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\alpha_m \\ -\alpha_{m-1} \\ \dots \\ -\alpha_0 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $A^{(n)}$ eine $(n+2) \times (n+2)$ Matrix und es gilt $0 \leq m \leq n+1$ und $n \geq 0$. Weiter ist offensichtlich $\det A^{(n)} = \beta^n \cdot (\bar{\beta}^{-1} - \beta) \neq 0$ wegen $|\beta| > 1$.

Auf Grund der einfachen Gestalt von $A^{(n)}$ ergeben sich die Koeffizienten γ_v , $v = 0, 1, \dots, n$, von p_n und die Größe σ sofort zu

$$(4b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = -\frac{\alpha_0}{\beta} \\ \gamma_\mu = -\frac{1}{\beta^{\mu+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\mu} \alpha_k \beta^k = \frac{1}{\beta} (\gamma_{\mu-1} - \alpha_\mu), \quad \mu = 1, 2, \dots, \min(m, n-1) \\ \gamma_\mu = -\frac{1}{\beta^{\mu+1}} \cdot \sum_{k=0}^m \alpha_k \beta^k = \frac{1}{\beta} \cdot \gamma_{\mu-1}, \quad \mu = m+1, m+2, \dots, n-1, \\ \gamma_n = -\sigma = -\frac{1}{\beta^n (\beta - \bar{\beta}^{-1})} \cdot \sum_{k=0}^m \alpha_k \beta^k. \end{array} \right.$$

Bei Berücksichtigung von Satz 4.1 gilt dann aber die

Folgerung 4.1:

Das durch die Beziehungen (4b) eindeutig bestimmte Polynom $p_n \in V_n$ ist Minimallösung an $\tilde{r}_m$ auf B_E bzgl. V_n und es gilt

$$s_{V_n}(\tilde{r}_m) = \left| \frac{\sigma}{\beta} \right|.$$

Diese Aussage ist identisch mit dem Ergebnis von Al'per [1], der das Polynom $p_n \in V_n$ bester Approximation an die Funktion

$$f(z) = (z - \alpha)^{-1} \quad \text{mit} \quad |\alpha| > 1$$

aus V_n bzgl. B_E in der Darstellung

$$p_n(z) = \frac{1 - cz^n(\bar{\alpha}z - 1)}{z - \alpha} \quad \text{mit} \quad c = \frac{\alpha^{-n}}{|\alpha|^2 - 1}$$

angab.

Um dieses Ergebnis zu verallgemeinern, müssen wir gewisse zusätzliche Bedingungen an die Koeffizienten der zu approximierenden rationalen Funktionen stellen. Wir geben uns im folgenden ein beliebiges $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vor und definieren durch

$$\tilde{W}_1^m = \{\tilde{r}_m; \tilde{r}_m \in W_1, m \geq n+2, \alpha_m = -\bar{\beta}\alpha_{m-1}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+3} = \dots = \alpha_{m-2} = 0, \\ \sum_{\mu=0}^{n+1} \alpha_\mu \beta^\mu = 0\}$$

eine Klasse von rationalen Funktionen.

Dann folgt der

Satz 4.3:

Es sei $\tilde{r}_m \in \tilde{W}_1^m$. Dann existiert genau ein Polynom $p_n \in V_n$ und ein $\sigma \in \mathbb{C}$, so daß die Beziehung

$$(4c) \quad \tilde{r}_m(z) - p_n(z) = \sigma \cdot z^{m-1} \cdot \frac{z - \bar{\beta}^{-1}}{z - \beta}$$

erfüllt ist.

Beweis:

Mit

$$p_n(z) = \sum_{v=0}^n \gamma_v z^v$$

kann (4c) wiederum umgeformt werden zu

$$(4d) \quad \sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu z^\mu - \sum_{v=0}^n \gamma_v (z - \beta) z^v = \sigma \cdot z^{m-1} \cdot (z - \bar{\beta}^{-1})$$

Führen wir wieder einen Koeffizientenvergleich durch, so ergibt sich die Größe σ zu

$$\sigma = \alpha_m = -\bar{\beta} \cdot \alpha_{m-1},$$

wobei die Gleichheit der Größen α_m und $-\bar{\beta} \cdot \alpha_{m-1}$ nach Voraussetzung gesichert ist.

Zur Bestimmung der Koeffizienten γ_v , $v = 0, 1, \dots, n$, ist das Gleichungssystem

$$\tilde{A}^{(n)} x = \tilde{b}$$

zu behandeln, wobei

$$\tilde{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \dots \\ \dots \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n+1} \\ -\alpha_n \\ \dots \\ \dots \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_0 \end{pmatrix}$$

ist.

$\tilde{A}^{(n)}$ ist eine $(n+2) \times (n+1)$ Matrix und es gilt offensichtlich

$$\text{rg } \tilde{A}^{(n)} = n+1.$$

Erweitern wir $\tilde{A}^{(n)}$ um die rechte Seite $\tilde{b}$ und nennen die so gewonnene $(n+2) \times (n+2)$ Matrix $\tilde{B}^{(n+2)}$, so gilt

$$(4e) \quad n+2 \geq \text{rg } \tilde{B}^{(n+2)} \geq n+1.$$

Das Gleichungssystem $\tilde{A}^{(n)} x = \tilde{b}$ ist aber genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\text{rg } \tilde{A}^{(n)} = \text{rg } \tilde{B}^{(n+2)}$$

gilt. Somit ist wegen (4e) die Bedingung

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = 0$$

notwendig und hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems $\tilde{A}^{(n)} x = \tilde{b}$. Entwickeln wir

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n+1} \\ \beta & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \beta & -1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \beta & -1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & -\alpha_0 \end{vmatrix}$$

nach der ersten Zeile, so folgt

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = (-1)^2 (-1) \cdot \det \tilde{B}^{(n+1)} + (-1)^{n+3} (-\alpha_{n+1}) \cdot \det \tilde{C}^{(n+1)}$$

mit

$$\det \tilde{C}^{(n+1)} = \begin{vmatrix} \beta & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta^{n+1} ,$$

also

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = - \det \tilde{B}^{(n+1)} + (-1)^{n+4} \alpha_{n+1} \beta^{n+1} .$$

Fortführung dieses Verfahrens ergibt

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = \det \tilde{B}^{(n)} + (-1)^{n+4} \alpha_n \beta^n + (-1)^{n+4} \alpha_{n+1} \beta^{n+1}$$

und schließlich

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = (-1)^n \cdot \sum_{v=0}^{n+1} \alpha_v \beta^v$$

und damit nach Voraussetzung

$$\det \tilde{B}^{(n+2)} = 0 .$$

Die Koeffizienten γ_v , $v = 0, 1, \dots, n$, von $p_n \in V_n$ ergeben sich sofort zu

$$(4f) \quad \gamma_\mu = - \sum_{v=0}^{\mu} \alpha_{\mu-v} \beta^{-v-1} , \quad \mu = 0, 1, \dots, n .$$

Somit ergibt sich wieder wegen $m \geq n+2$ nach Satz 4.1 die

Folgerung 4.2:

Das durch die Beziehungen (4f) definierte Polynom $p_n \in V_n$ ist Minimallösung an $\tilde{f}_m$ auf B_E bzgl. V_n und es gilt

$$s_{V_n}(\tilde{f}_m) = \frac{|\sigma|}{|\beta|} = \frac{|\alpha_m|}{|\beta|} .$$

Für eine weitere Verallgemeinerung benötigen wir zwei vorbereitende Aussagen.

Es sei $\{A_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, eine Folge von $(k+2) \times (k+2)$ Matrizen,

die gegeben sei durch

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \xi & \tau \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \xi & \tau & -1 \\ -\zeta & -\theta & \tau \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & \tau & -1 & 0 \\ -\zeta & -\theta & \tau & -1 \\ 0 & 0 & -\theta & \tau \end{pmatrix},$$

und allgemein durch

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \tau & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta & -\theta & \tau & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & \tau & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\theta & \tau & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\theta & \tau \end{pmatrix}$$

Hierbei sei $\xi, \tau, \zeta, \theta \in \mathbb{C}$. Setzen wir $\Delta_k = \det A_k$, so gilt

Lemma 4.1:

Es ist

$$\Delta_k = \tau \cdot \Delta_{k-1} - \theta \cdot \Delta_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Beweis:

Entwickeln wir Δ_k nach der letzten Zeile, so folgt

$$\Delta_k = (-1)^{2k+4} \cdot \tau \cdot \Delta_{k-1} + (-1)^{2k+3} \cdot (-\theta) \cdot \det B_{k+1}$$

mit

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \tau & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\theta & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\theta & -1 \end{pmatrix}$$

det B_{k+1} nach der letzten Spalte entwickelt, ergibt schließlich

$$\Delta_k = \tau \cdot \Delta_{k-1} - \theta \cdot \Delta_{k-2}$$

Setzen wir

$$\Delta_{-1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\tau & -\theta \end{vmatrix} ,$$

so folgt mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.1 weiter

Lemma 4.2:

Für $m = 1, 2, 3, \dots$ gilt (4g)

$$\Delta_{2m} = \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k}{2k} \tau^{2k} \theta^{m-k} + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{m-k-1}$$

und (4h)

$$\Delta_{2m+1} = \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k+1}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{m-k} + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k}{2k} \tau^{2k} \theta^{m-k} .$$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage über Induktion.

Auf Grund der Rekursionsformel in Lemma 4.1 und der Beziehung

$$\Delta_1 = \tau \cdot \Delta_0 + \Delta_{-1}$$

folgt für $m = 1$:

$$\Delta_2 = (\tau^2 - \theta) \Delta_0 + \tau \cdot \Delta_{-1}$$

und

$$\Delta_3 = (\tau^3 - 2\tau\theta) \Delta_0 + (\tau^2 - \theta) \Delta_{-1} .$$

Anwendung von (4g) und (4h) führt auf das gleiche Ergebnis; denn es gilt, wiederum $m = 1$ gesetzt:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} \binom{1+k}{2k} \tau^{2k} \theta^{1-k} + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^0 (-1)^{-k} \binom{1+k}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{-k} \\ &= \Delta_0 (-\theta + \tau^2) + \Delta_{-1} \cdot \tau , \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} \binom{2+k}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{1-k} + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} \binom{1+k}{2k} \tau^{2k} \theta^{1-k} \\ &= \Delta_0 (-2\tau\theta + \tau^3) + \Delta_{-1} (-\theta + \tau^2) . \end{aligned}$$

Die Behauptung sei richtig für $i \leq m-1$. Dann folgt nach Lemma 4.1 unter Berücksichtigung der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2m} &= \tau \cdot \Delta_{2m-1} - \theta \cdot \Delta_{2m-2} \\
 &= \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k}{2k+1} \tau^{2k+2} \theta^{m-k-1} + \\
 &\quad + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k-1}{2k} \tau^{2k+1} \theta^{m-k-1} - \\
 &\quad - \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k-1}{2k} \tau^{2k} \theta^{m-k} - \\
 &\quad - \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^{m-k-2} \binom{m+k-1}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{m-k-1} \\
 &= \Delta_0 \{ \tau^{2m} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} \left[\binom{m+k-1}{2k-1} + \binom{m+k-1}{2k} \right] \tau^{2k} \theta^{m-k} + (-1)^m \theta^m \} + \\
 &\quad + \Delta_{-1} \{ \tau^{2m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^{m-k-1} \left[\binom{m+k-1}{2k} + \binom{m+k-1}{2k+1} \right] \tau^{2k+1} \theta^{m-k-1} \} \\
 &= \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k}{2k} \tau^{2k} \theta^{m-k} + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{m-k-1} .
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2m+1} &= \tau \cdot \Delta_{2m} - \theta \cdot \Delta_{2m-1} \\
 &= \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k}{2k} \tau^{2k+1} \theta^{m-k} + \\
 &\quad + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k}{2k+1} \tau^{2k+2} \theta^{m-k-1} - \\
 &\quad - \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{m-k} - \\
 &\quad - \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m+k-1}{2k} \tau^{2k} \theta^{m-k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2m+1} &= \Delta_0 \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} \left[\binom{m+k}{2k} + \binom{m+k}{2k+1} \right] \tau^{2k+1} \theta^{m-k} + \tau^{2m+1} \right\} + \\ &+ \Delta_{-1} \left\{ \tau^{2m} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} \left[\binom{m+k-1}{2k-1} + \binom{m+k-1}{2k} \right] \tau^{2k} \theta^{m-k} + (-1)^m \theta^m \right\} \\ &= \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k+1}{2k+1} \tau^{2k+1} \theta^{m-k} + \Delta_{-1} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m+k}{2k} \tau^{2k} \theta^{m-k} .\end{aligned}$$

Wir fixieren im folgenden ein beliebiges $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und ein beliebiges $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \geq m-2$. Weiter sei

$$w_2^m = \{r_m; r_m(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu z^\mu}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)} , \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}, |\beta_1| > 1, |\beta_2| > 1, \\ \beta_1 \neq -\beta_2, \alpha_\mu \in \mathbb{C} \text{ f\"ur } \mu = 0, 1, \dots, m\} .$$

Setzen wir

$$\tau = \beta_1 + \beta_2 , \quad \theta = \beta_1 \cdot \beta_2 , \quad \xi = \overline{\beta_1}^{-1} + \overline{\beta_2}^{-1} , \quad \zeta = (\overline{\beta_1 \cdot \beta_2})^{-1} ,$$

so wird mit den Bezeichnungen der Lemmata 4.1 und 4.2 durch

$$(4q) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \theta^k \Delta_{n-k} + \theta^n \{ (\xi - \tau) \alpha_n + (\zeta - \theta) \alpha_{n+1} + (\tau \zeta - \xi \theta) \alpha_{n+2} \} = 0$$

eine Bedingung an die Koeffizienten von r_m eingeführt, wobei

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_{n+2} = 0$$

sei.

Mit Hilfe der obigen Vereinbarungen definieren wir nun durch

$$\tilde{w}_2^m = \{r_m; r_m \in w_2^m, r_m \text{ erfüllt } (4q)\}$$

eine Klasse von rationalen Funktionen. Dann gilt der

Satz 4.4:

Es seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \geq m-2$ fixiert. Weiter sei $\tilde{r}_m \in \tilde{w}_2^m$. Dann existiert genau ein Polynom $p_n \in V_n$ und ein $\sigma \in \mathbb{C}$, so daß

$$(4h) \quad \tilde{r}_m(z) - p_n(z) = \sigma \cdot z^n \cdot \frac{(z - \overline{\beta_1}^{-1})(z - \overline{\beta_2}^{-1})}{(z - \beta_1)(z - \beta_2)}$$

erfüllt ist.

Beweis:

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen und wiederum

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_{n+2} = 0$$

und

$$p_n(z) = \sum_{v=0}^n \gamma_v z^v$$

gesetzt, ist (4h) umzuformen in

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n+2} \alpha_v z^v - \sum_{v=2}^{n+2} \gamma_{v-2} z^v + \tau \cdot \sum_{v=1}^{n+1} \gamma_{v-1} z^v - \\ - \theta \cdot \sum_{v=0}^n \gamma_v z^v - \sigma \{ z^{n+2} - \xi \cdot z^{n+1} + \zeta \cdot z^n \} = 0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem

$$(4i) \quad \hat{A}^{(n)} x = \hat{b}$$

mit

$$\hat{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \xi & \tau & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\zeta & -\theta & \tau & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & \tau & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\theta & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\theta \end{pmatrix},$$

$$x' = (\sigma, \gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_1, \gamma_0)$$

und

$$\hat{b}' = (-\alpha_{n+2}, -\alpha_{n+1}, \dots, -\alpha_1, -\alpha_0)$$

$\hat{A}^{(n)}$ ist eine $(n+3) \times (n+2)$ Matrix und es gilt

$$\text{rg } \hat{A}^{(n)} = n+2,$$

da die letzten $n+2$ Zeilen von $\hat{A}^{(n)}$ linear unabhängig sind.

Erweitern wir $\hat{A}^{(n)}$ um die rechte Seite $\hat{b}$ und nennen die so gewonnene $(n+3) \times (n+3)$ Matrix $\hat{B}_{n+3}$, so ist für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Gleichungssystems (4i) notwendig und hinreichend, daß

$$\det \hat{B}_{n+3} = 0$$

ist.

Entwickeln wir $\det \hat{B}_{n+3}$ nach der letzten Zeile, so folgt mit den Bezeichnungen der Lemmata 4.1 und 4.2

$$\det \hat{B}_{n+3} = -\alpha_0 \cdot \Delta_n + \theta \cdot \det \hat{B}_{n+2}$$

mit

$$\hat{B}_{n+2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n+2} \\ \xi & \tau & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n+1} \\ -\zeta & -\theta & \tau & -1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_n \\ 0 & 0 & -\theta & \tau & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & -1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\theta & \tau & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\theta & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Fortführung dieses Verfahrens führt zu

$$\det \hat{B}_{n+3} = -\alpha_0 \cdot \Delta_n + \theta \{-\alpha_1 \cdot \Delta_{n-1} + \theta \{-\alpha_2 \cdot \Delta_{n-2} + \theta \{ \dots$$

$$\dots + \theta \{-\alpha_{n-2} \Delta_2 + \theta \{-\alpha_{n-1} \Delta_1 + \theta \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -\alpha_{n+2} \\ \xi & \tau & -\alpha_{n+1} \\ -\zeta & -\theta & -\alpha_n \end{vmatrix} \} \dots \}$$

$$= -\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k \alpha_k \Delta_{n-k} + (\xi - \tau) \theta^n \alpha_n + (\zeta - \theta) \theta^n \alpha_{n+1} + (\tau \zeta - \xi \theta) \theta^n \alpha_{n+2} \right\},$$

also

$$\det \hat{B}_{n+3} = 0$$

nach Voraussetzung (4q).

Die Koeffizienten γ_v , $v = 0, 1, \dots, n$, von p_n und die Größe σ sind rekursiv sofort zu bestimmen:

$$(4j) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \frac{1}{\theta} \cdot \alpha_0 \\ \gamma_1 = \frac{1}{\theta} (\alpha_1 + \tau \cdot \gamma_0) \\ \gamma_k = \frac{1}{\theta} (\alpha_k + \tau \cdot \gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}) \quad , \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \quad , \\ \gamma_n = \frac{1}{\theta - \zeta} (\alpha_n - \zeta \cdot \alpha_{n+2} + \tau \cdot \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2}) \\ \sigma = \alpha_{n+2} - \gamma_n \quad . \end{array} \right.$$

Somit gilt wieder

Folgerung 4.3:

Das durch die Beziehungen (4j) eindeutig bestimmte Polynom $p_n \in V_n$ ist Minimallösung an $\tilde{r}_m$ auf B_E bzgl. V_n und es gilt

$$\rho_{V_n}(\tilde{r}_m) = \frac{|\sigma|}{|\beta_1| \cdot |\beta_2|} = \frac{|\alpha_{n+2} - \gamma_n|}{|\theta|} \quad .$$

Um dies zu veranschaulichen, sei noch ein Beispiel zu der vorhergehenden Approximationsaufgabe angegeben. Wir verwenden wiederum die Bezeichnungen der Lemmata 4.1 und 4.2.

Beispiel 4.1:

Wir wählen $n = 3$ und $m = 4$, also

$$\tilde{r}_m(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^4 \alpha_\mu z^\mu}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)} \quad .$$

Weiter setzen wir

$$\beta_1 = 1 + i \quad , \quad \beta_2 = 1 - i \quad .$$

Dann ergibt sich

$$\tau = 2 \quad , \quad \theta = 2 \quad , \quad \zeta = 1 \quad , \quad \zeta = \frac{1}{2} \quad .$$

Für die Bedingung (4g) an die Koeffizienten von $\tilde{r}_m$ ergibt sich

$$\alpha_0 \cdot \Delta_3 + \alpha_1 \cdot \theta \cdot \Delta_2 + \alpha_2 \cdot \theta^2 \cdot \Delta_1 + \theta^3 \cdot \{(\xi - \tau)\alpha_3 + (\zeta - \theta)\alpha_4 + (\tau\zeta - \xi\theta)\alpha_5\} = 0$$

und somit wegen

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 3 \quad \text{und} \quad \alpha_5 = 0$$

schließlich

$$(4k) \quad 3\alpha_0 + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 8\alpha_3 - 12\alpha_4 = 0.$$

Setzen wir weiter

$$\alpha_0 = 1 + \frac{1}{2}i, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}i \quad \text{und} \quad \alpha_4 = \frac{1}{12} - \frac{1}{24}i,$$

also

$$\tilde{r}_m(z) = \frac{(\frac{1}{12} - \frac{1}{24}i)z^4 + (\frac{1}{16} + \frac{1}{4}i)z^3 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z^2 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i)z + 1 + \frac{1}{2}i}{(z - 1 - i)(z - 1 + i)},$$

dann ist die Bedingung (4k) erfüllt und die Minimallösung p_3 an $\tilde{r}_m$ auf B_E bzgl. V_3 ergibt sich auf Grund von (4j) zu

$$p_3(z) = (\frac{7}{24} + \frac{2}{3}i)z^3 + (\frac{3}{8} + \frac{5}{8}i)z^2 + (\frac{3}{8} + \frac{1}{2}i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i.$$

Die Minimalabweichung $\rho_{V_3}(\tilde{r}_m)$ ist hierbei

$$\rho_{V_3}(\tilde{r}_m) = \frac{\sqrt{305}}{48} = .3638385\dots$$

Es ist klar, daß weitere Verallgemeinerungen möglich sind. Diese werden aber zu noch komplizierteren Bedingungen an die Koeffizienten der zu approximierenden rationalen Funktionen führen.

Betrachten wir zum Abschluß dieses Kapitels polynomiale Approximationen an Funktionen f , die auf dem Einheitskreis stetig sind, bzgl. des Einheitskreises, so kann Satz 4.2 in der folgenden Weise modifiziert werden:

Satz 4.5:

f sei eine auf E stetige Funktion. Existiert ein Polynom $p_n \in V_n$ mit

$$f(z) - p_n(z) = \sigma \cdot z^k \cdot \prod_{\mu=1}^m \frac{z - \bar{\beta}_{\mu}^{-1}}{z - \beta_{\mu}} \cdot \prod_{\mu=1}^{\tilde{m}} \frac{z - \bar{\gamma}_{\mu}^{-1}}{z - \gamma_{\mu}},$$

$$\sigma, \beta_{\mu}, \gamma_{\mu} \in \mathbb{C}, \quad |\beta_{\mu}| > 1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, m, \\ |\gamma_{\mu}| < 1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, \tilde{m},$$

und ist $k+m-\tilde{m} \geq n+1$, dann ist p_n das Polynom bester Approximation an f aus V_n auf E . Weiter gilt

$$\varrho_{V_n}(f) = \frac{|\sigma|}{|\beta_1| \dots |\beta_m| \cdot |\gamma_1| \dots |\gamma_{\tilde{m}}|}$$

Beweis:

Es ist

$$f(z) - p_n(z) = (-1)^{m+\tilde{m}} \cdot \frac{\sigma}{\beta_1 \dots \beta_m \cdot \gamma_1 \dots \gamma_{\tilde{m}}} \cdot \tilde{w}(z)$$

mit

$$\tilde{w}(z) = z^k \cdot \prod_{\mu=1}^m \frac{z - \bar{\beta}_{\mu}^{-1}}{1 - \bar{\beta}_{\mu}^{-1} \cdot z} \cdot \prod_{\mu=1}^{\tilde{m}} \frac{z - \bar{\gamma}_{\mu}^{-1}}{1 - \bar{\gamma}_{\mu}^{-1} \cdot z}.$$

Insbesondere ist für $z \in E$

$$|\tilde{w}(z)| = 1.$$

Da $\tilde{w}$ genau $k+m$ Nullstellen im Innern des Einheitskreises und genau m Polstellen innerhalb des Einheitskreises besitzt, folgt auf Grund des Argumentprinzips (siehe z.B. Marden[10]), daß $\tilde{w}$ den Einheitskreis E auf den $(k+m-\tilde{m})$ -mal durchlaufenen Einheitskreis abbildet. (Hierbei sind Null- und Polstellen von $\tilde{w}$ entsprechend ihrer Vielfachheit zu zählen). Der Rest des Beweises verläuft dann analog dem Beweis des Satzes 4.2.

5. Ein weiteres hinreichendes Kriterium

Es sei B ein kompakter Raum und $C(B)$ der lineare Raum der auf B stetigen komplexwertigen Funktionen f . Weiter sei V ein linearer Teilraum von $C(B)$ der Dimension $n+1$, der die Haarsche Bedingung erfüllt, und $\{z_\mu\}$, $\mu = 0, 1, \dots, n+1$, eine Menge von $n+2$ Punkten mit $z_\mu \in B$, $z_\mu \neq z_\nu$ für $\mu \neq \nu$. Dann gilt unter Heranziehung einer Basis $h_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, von V der

Satz 5.1 (Meinardus[11]):

Die durch

$$h(z_\mu) + \lambda \cdot \frac{\bar{\lambda}_\mu}{|\lambda_\mu|} = f(z_\mu) \quad , \quad \mu = 0, 1, \dots, n+1 \quad ,$$

$$\sum_{\mu=0}^{n+1} \lambda_\mu h_\nu(z_\mu) = 0 \quad , \quad \nu = 0, 1, \dots, n \quad ,$$

$$\sum_{\mu=0}^{n+1} |\lambda_\mu| = 1 \quad , \quad \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda_0 > 0 \quad ,$$

eindeutig definierte Funktion $h \in V$ ist gleich der Minimallösung an f bzgl. V auf der Menge der Punkte z_μ , $\mu = 0, 1, \dots, n+1$.

Mit Hilfe dieses Satzes werden wir ein weiteres hinreichendes Kriterium herleiten. Hierzu setzen wir wieder

$$B = B_E \quad , \quad V = V_n \quad \text{und} \quad C(B) = H(B_E) \quad .$$

Dann gilt mit den Vereinbarungen in Satz 5.1 das

Lemma 5.1:

Es sei $\{z_\mu\}$, $\mu = 0, 1, \dots, n+1$, eine Menge von $n+2$ Punkten mit $z_\mu \in \mathbb{C}$, $|z_\mu| = 1$, also $z_\mu = z(\phi_\mu) = \cos \phi_\mu + i \cdot \sin \phi_\mu$, und $z_\mu \neq z_\nu$ für $\mu \neq \nu$. Weiter gelte $0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n+1} < 2\pi$, dann ist

$$\arg\{\lambda_\mu\} = \left[\mu \cdot \pi - \frac{n}{2}(\phi_\mu - \phi_0) \right] \bmod 2\pi$$

Beweis:

Die Größen λ_μ , $\mu = 0, 1, \dots, n+1$, sind durch die beiden Beziehungen

$$(5a) \quad \sum_{\mu=0}^{n+1} \lambda_\mu z_\mu^\nu = 0 \quad , \quad \nu = 0, 1, \dots, n \quad ,$$

$$(5b) \quad \sum_{\mu=0}^{n+1} |\lambda_\mu| = 1 \quad , \quad \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda_0 > 0$$

definiert. Setzen wir

$$z_{\mu}^v = e^{i \cdot v \phi_{\mu}} \quad \text{und} \quad t_{\mu} = -\frac{\lambda_{\mu}}{\lambda_0} ,$$

so kann (5a) umgeformt werden in

$$(5c) \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} e^{i \cdot v \phi_{\mu}} \cdot t_{\nu} = e^{i \cdot v \phi_0} , \quad v = 0, 1, \dots, n .$$

Setzen wir für $k = 0, 1, \dots, n$ weiter

$$\Delta_k = \det \left(\sum_{\nu=1}^{n+1} e^{i \cdot v \phi_{\nu}} , \quad v = 0, 1, \dots, n , \quad v \neq k \right) ,$$

so ist Δ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, eine Determinante vom Vandermondeschen Typ, und aus (5c) folgt somit mit Hilfe der Cramerschen Regel für $\mu = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} t_{\mu} &= (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\Delta_{\mu}}{\Delta_0} \\ &= (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\prod_{\substack{k>j=0 \\ k, j \neq \mu}}^{n+1} (e^{i \cdot \phi_k} - e^{i \cdot \phi_j})}{\prod_{\substack{k>j=1 \\ k, j \neq \mu}}^{n+1} (e^{i \cdot \phi_k} - e^{i \cdot \phi_j})} = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} \frac{e^{i \cdot \phi_0} - e^{i \cdot \phi_j}}{e^{i \cdot \phi_{\mu}} - e^{i \cdot \phi_j}}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} \frac{e^{i \cdot \phi_0} - e^{i \cdot \phi_j}}{e^{i \cdot \phi_{\mu}} - e^{i \cdot \phi_j}}} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \arg\{t_{\mu}\} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} \arg \left\{ \frac{e^{i \cdot \phi_0} - e^{i \cdot \phi_j}}{e^{i \cdot \phi_{\mu}} - e^{i \cdot \phi_j}} \right\} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} \arg \left\{ \frac{(e^{i \cdot \phi_0} - e^{i \cdot \phi_j})(e^{-i \cdot \phi_{\mu}} - e^{-i \cdot \phi_j})}{2[1 - \cos(\phi_{\mu} - \phi_j)]} \right\} . \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq \phi_0, \phi_j < 2\pi$ und $\phi_{\mu} \neq \phi_j$ ist aber

$$1 - \cos(\phi_{\mu} - \phi_j) > 0 ,$$

also folgt

$$\begin{aligned}
 \arg\{t_\mu\} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} \arg\{(e^{i\phi_0} - e^{i\phi_j})(e^{-i\phi_\mu} - e^{-i\phi_j})\} - \underbrace{\arg\{2(1 - \cos(\phi_\mu - \phi_j))\}}_{=0} \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} \arg\{4 \cdot \sin \frac{\phi_j - \phi_0}{2} \cdot \sin \frac{\phi_j - \phi_\mu}{2} \cdot (\cos \frac{\phi_0 - \phi_\mu}{2} + i \sin \frac{\phi_0 - \phi_\mu}{2})\} \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} [\underbrace{\arg\{4\}}_{=0} + \arg\{\sin \frac{\phi_j - \phi_0}{2} \cdot \sin \frac{\phi_j - \phi_\mu}{2}\} + \\
 &\quad + \arg\{\cos \frac{\phi_0 - \phi_\mu}{2} + i \sin \frac{\phi_0 - \phi_\mu}{2}\}] .
 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\sin \frac{\phi_j - \phi_0}{2} > 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n+1 ,$$

$$\sin \frac{\phi_j - \phi_\mu}{2} \begin{cases} > 0 & \text{für } j = \mu+1, \mu+2, \dots, n+1 \\ < 0 & \text{für } j = 1, 2, \dots, \mu-1 \end{cases} .$$

Somit ist

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^{n+1} \arg\{\sin \frac{\phi_j - \phi_0}{2} \cdot \sin \frac{\phi_j - \phi_\mu}{2}\} = (\mu - 1)\pi ,$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \arg\{t_\mu\} &= (\mu-1)\pi + n \cdot \arg\{\cos \frac{\phi_0 - \phi_\mu}{2} + i \sin \frac{\phi_0 - \phi_\mu}{2}\} \\
 &= (\mu-1)\pi - n \cdot (\arctan\{\frac{\sin \frac{\phi_\mu - \phi_0}{2}}{\cos \frac{\phi_\mu - \phi_0}{2}}\}) \\
 &= (\mu - 1)\pi - \frac{n}{2}(\phi_\mu - \phi_0)
 \end{aligned}$$

Wegen

$$t_\mu = -\frac{\lambda_\mu}{\lambda_0} , \quad \text{also} \quad \lambda_\mu = -\lambda_0 \cdot t_\mu ,$$

folgt aus Beziehung (5b)

$$\arg\{\lambda_0\} = 0 \quad ,$$

und für $\mu = 1, 2, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} \arg\{\lambda_\mu\} &= \arg\{-\lambda_0 \cdot t_\mu\} \\ &= \arg\{-\lambda_0\} + \arg\{t_\mu\} \\ &= \pi + (\mu - 1)\pi - \frac{n}{2}(\phi_\mu - \phi_0) \\ &= \left[\mu \cdot \pi - \frac{n}{2}(\phi_\mu - \phi_0) \right] \bmod 2\pi . \end{aligned}$$

Insbesondere folgt hieraus

$$\arg\{\bar{\lambda}_\mu\} = \left[\frac{n}{2}(\phi_\mu - \phi_0) - \mu \cdot \pi \right] \bmod 2\pi .$$

Diese Aussagen führen aber zu dem folgenden hinreichenden Kriterium:

Satz 5.2:

Es sei $f \in H(B_E)$, $f \in V_n$, und $p_n \in V_n$. Existieren $n+2$ Werte ϕ_μ mit $0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n+1} < 2\pi$, so daß

- (1) $|f(z(\phi_\mu)) - p_n(z(\phi_\mu))| = \|f - p_n\|_E \quad , \quad \mu = 0, 1, \dots, n+1 \quad ,$
 - (2) $\arg\{f(z(\phi_\mu)) - p_n(z(\phi_\mu))\} = \left[\theta + \frac{n}{2}(\phi_\mu - \phi_0) - \mu \cdot \pi \right] \bmod 2\pi ,$
- $$\mu = 1, 2, \dots, n+1 \quad ,$$

mit $\theta = \arg\{f(z(\phi_0)) - p_n(z(\phi_0))\}$ gilt, dann ist p_n das Polynom bester Approximation an f aus V_n bzgl. B_E .

Beweis:

Mit

$$\arg\left\{\lambda \cdot \frac{\bar{\lambda}_0}{|\lambda_0|}\right\} = \arg\{\lambda\} = \arg\{f(z(\phi_0)) - p_n(z(\phi_0))\} = \theta$$

folgt auf Grund des Satzes 5.1 und des Lemmas 5.1, daß p_n das Polynom bester Approximation an f aus V_n auf der Punktmenge

$$M = \{z(\phi_\mu)\} \quad , \quad \mu = 0, 1, \dots, n+1 \quad ,$$

ist. Weiter gilt nach Voraussetzung

$$\|f - p_n\|_M = \|f - p_n\|_E \quad .$$

Somit gilt wegen

$$\min_{q \in V_n} \|f - q\|_M = \min_{q \in V_n} \|f - q\|_E$$

schließlich: p_n ist Minimallösung an f aus V_n sogar auf E und damit wegen $f \in H(B_E)$ auf B_E .

6. Ein Abstiegsverfahren zur Ermittlung von polynomialen Minimallösungen bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

In den nächsten Kapiteln beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von polynomialen Minimallösungen aus V_n an Funktionen $f \in H(B_E)$ bzgl. E und damit bzgl. B_E . Als erstes geben wir ein Abstiegsverfahren an.

Im folgenden sei $\{\delta_k\}$, $\delta_k \in \mathbb{R}$, eine Nullfolge, beispielsweise definiert durch $\delta_k = \frac{1}{k}$ für $k = 1, 2, \dots$. Für $p_k \in V_n$ sei

$$E_k = \|f - p_k\|_E$$

und

$$M(p_k) = \{z; z \in E, |f(z) - p_k(z)| = E_k\} \quad ,$$

$$M_{\epsilon_k} = \{z; z \in E, |f(z) - p_k(z)| \geq E_k - \epsilon_k\} \quad , \quad \epsilon_k \in \mathbb{R}, \epsilon_k > 0 \quad ,$$

$$\tilde{M}_{\delta_k} = \{z; z \in E, z = z(j \cdot \delta_k), j = 0, 1, \dots, [\frac{2\pi}{\delta_k}]\}$$

und schließlich

$$M_k = M(p_k) \cup \{M_{\epsilon_k} \cap \tilde{M}_{\delta_k}\} \quad .$$

Mit diesen Vereinbarungen verläuft der k 'te Schritt des Verfahrens folgendermaßen:

(1) Maximiere die Zahl μ unter den Nebenbedingungen

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z) - p_k(z)}) q_k(z) - \mu \geq 0 \quad \text{für } z \in M_k \quad ,$$

$$|a_j^{(k)}| \leq 1 \quad , \quad |b_j^{(k)}| \leq 1 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n \quad ,$$

wobei

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^n (a_j^{(k)} + i \cdot b_j^{(k)}) z^j$$

ist. Das maximale μ nennen wir $\mu_k = \mu_k(M_k, p_k)$.

Setzen wir für $z \in E$

$$f(z(\phi)) - p_k(z(\phi)) = A^{(k)}(\phi) + i \cdot B^{(k)}(\phi) ,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\overline{f(z(\phi)) - p_k(z(\phi))}) q_k(z(\phi)) &= \\ &= \sum_{j=0}^n (A^{(k)}(\phi) \cdot \cos j\phi + B^{(k)}(\phi) \cdot \sin j\phi) \cdot a_j^{(k)} + \\ &+ \sum_{j=0}^n (B^{(k)}(\phi) \cdot \cos j\phi - A^{(k)}(\phi) \cdot \sin j\phi) \cdot b_j^{(k)} . \end{aligned}$$

Somit ist die obige Aufgabe ein lineares Optimierungsproblem, besitzt also mindestens eine Lösung. Weiter gilt offensichtlich $\mu_k \geq 0$.

(2) (a) $\mu_k = 0$:

(a) $M_k = M(p_k)$:

Dann existiert kein $q_k \in V_n$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z) - p_k(z)}) q_k(z) > 0$$

für alle $z \in M(p_k)$ und nach Satz 1.2 ist p_k Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n .

(b) $M_k \neq M(p_k)$:

Setze

$$\epsilon_{k+1} = \frac{\epsilon_k}{2} \quad \text{und} \quad p_{k+1} = p_k$$

und gehe zu (1).

(b) $\mu_k > 0$:

Setze

$$\epsilon_{k+1} = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{2} , & \text{falls } \mu_k \leq \epsilon_k \\ \epsilon_k , & \text{falls } \mu_k > \epsilon_k \end{cases}$$

und

$$p_{k+1} = p_k + h_k \cdot q_k ,$$

wobei h_k als das minimale $\hat{h}_k$, $\hat{h}_k \in \mathbb{R}$, $\hat{h}_k \geq 0$, gewählt ist, das der Beziehung

$$\|f - p_k - \hat{h}_k \cdot q_k\|_E = \min$$

genügt.

(Diese Aufgabe besitzt aber mindestens eine Lösung, da

$$\|f - p_{k+1}\|_E = \|f - p_k - \hat{h}_k \cdot q_k\|_E$$

eine konvexe Funktion in $\hat{h}_k$ ist. Weiter gilt offensichtlich

$$\|f - p_{k+1}\|_E \leq \|f - p_k\|_E \quad).$$

Konvergenzbeweis:

(1) Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab. Dann ist aber die Minimallösung erreicht und wir sind fertig.

(2) Das Verfahren bricht nicht ab:

Dann erhalten wir, ausgehend von einem Ausgangspolynom $p_1 \in V_n$ und einer Ausgangsgröße $e_1 \in \mathbb{R}$, Approximationen $p_k \in V_n$ mit

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_k \geq e_{k+1} \geq \dots .$$

Die Folge $\{e_k\}$ fällt monoton und ist beschränkt: Sie konvergiert gegen einen Grenzwert L . Insbesondere folgt, daß die Zahlen

$$\|p_k\|_E \quad \text{und} \quad \|q_k\|_E$$

beschränkt sind. Weiter ist $\{M_k\}$ eine Folge von Teilmengen in einem kompakten metrischen Raum. Es existiert also eine Teilfolge $\{k_i\}$ mit den Eigenschaften

$$(6a) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} = p \in V_n ,$$

$$(6b) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} q_{k_i} = q \in V_n \quad \text{und}$$

$$(6c) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} M_{k_i} = M \in E.$$

Lemma 6.1:

Für jede Teilfolge $\{k_i\}$ mit den Eigenschaften (6a), (6b) und (6c) gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i}(M_{k_i}, p_{k_i}) = \mu(M, p) = \tilde{\mu} = 0.$$

Beweis:

Es existiert ein $z \in M$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z)} - \overline{p(z)})q(z) = \tilde{\mu}.$$

Weiter existiert eine Folge $\{z_{k_i}\}$ mit

$$z_{k_i} \in M_{k_i} \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} z_{k_i} = z \in M.$$

Somit folgt

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_{k_i})} - \overline{p_{k_i}(z_{k_i})})q_{k_i}(z_{k_i}) \geq \mu_{k_i}.$$

Insgesamt folgt

$$\mu_{k_i} - \tilde{\mu} \leq \operatorname{Re}(\overline{f(z_{k_i})} - \overline{p_{k_i}(z_{k_i})})q_{k_i}(z_{k_i}) - \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - \overline{p(z)})q(z)$$

und schließlich durch Grenzübergang $i \rightarrow \infty$

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i} \leq \tilde{\mu}.$$

Andererseits existiert eine Teilfolge $\{k_{i_j}\} \subset \{k_i\}$, so daß

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{k_{i_j}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i}$$

gilt. Zu jedem k_{i_j} wählen wir ein $\tilde{z}_{k_{i_j}}$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(\tilde{z}_{k_{i_j}})} - \overline{p_{k_{i_j}}(\tilde{z}_{k_{i_j}})})q_{k_{i_j}}(\tilde{z}_{k_{i_j}}) = \mu_{k_{i_j}}.$$

O.B.d.A. nehmen wir an, daß die $\tilde{z}_{k_{i_j}}$ so gewählt seien, daß die

Folge $\{\tilde{z}_{k_{i_j}}\}$ konvergiert, daß also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{z}_{k_{i_j}} = \tilde{z} \in M$$

gilt. Wegen

$$\operatorname{Re}(\overline{f(\tilde{z})} - \overline{p(\tilde{z})})q(\tilde{z}) \geq \tilde{\mu}$$

folgt weiter

$$\tilde{\mu} - \mu_{k_{i_j}} \leq \operatorname{Re}(\overline{f(\tilde{z})} - \overline{p(\tilde{z})})q(\tilde{z}) - \operatorname{Re}(\overline{f(\tilde{z}_{k_{i_j}})} - \overline{p_{k_{i_j}}(\tilde{z}_{k_{i_j}})})q_{k_{i_j}}(\tilde{z}_{k_{i_j}})$$

und schließlich durch Grenzübergang

$$\tilde{\mu} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} \mu_{k_i} = \tilde{\mu} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i}, \text{ also } \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i} = \tilde{\mu}.$$

Die Folge $\{h_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, ist beschränkt; denn setzen wir

$$\theta = \min \left\{ \|q\|_E; \left| \begin{array}{l} q(z) = \sum_{j=0}^n (a_j + i \cdot b_j) z^j, \quad |a_j| \leq 1, \quad |b_j| \leq 1, \quad j=0, 1, \dots, n. \\ \text{es ex. mind. ein } \tilde{j} \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ mit } |a_{\tilde{j}}| = 1 \text{ bzw. } |b_{\tilde{j}}| = 1 \end{array} \right. \right\}$$

so ist offensichtlich $\theta > 0$ und es gilt für $k = 1, 2, \dots$

$$h_k \cdot \theta \leq h_k \cdot \|q_k\|_E = \|f - p_k - h_k \cdot q_k - (f - p_k)\|_E$$

$$\leq E_{k+1} + E_k \leq 2E_1,$$

also

$$0 \leq h_k \leq \frac{2E_1}{\theta}.$$

Somit besitzt die Folge $\{h_k\}$ mindestens einen Häufungspunkt. Es gilt sogar das

Lemma 6.2:

Sei $\{k_i\}$ eine Teilfolge mit den Eigenschaften (6a), (6b), (6c) und mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_{k_i} = \tilde{h} \quad ,$$

dann ist

$$\tilde{h} \geq h(M, p, q) \quad \text{und} \quad \|f - p - \tilde{h} \cdot q\|_E = \|f - p - h \cdot q\|_E \quad .$$

Beweis:

Für $i = 1, 2, \dots$ gilt

$$\|f - p_{k_i} - h_{k_i} \cdot q_{k_i}\|_E \leq \|f - p_{k_i} - h \cdot q_{k_i}\|_E \quad .$$

Durch Grenzübergang $i \rightarrow \infty$ folgt

$$\|f - p - \tilde{h} \cdot q\|_E \leq \|f - p - h \cdot q\|_E \quad .$$

Da offensichtlich

$$\|f - p - \tilde{h} \cdot q\|_E \geq \|f - p - h \cdot q\|_E$$

gilt, folgt insgesamt

$$\|f - p - \tilde{h} \cdot q\|_E = \|f - p - h \cdot q\|_E \quad .$$

Nach Voraussetzung ist h gerade das minimale $\hat{h}$, das der Beziehung

$$\|f - p - \hat{h} \cdot q\|_E = \min$$

genügt. Somit folgt

$$\tilde{h} \geq h = h(M, p, q) \quad .$$

Weiter gilt das

Lemma 6.3:

Es ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0 \quad .$$

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gelte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0 .$$

$\{k_i\}$ sei eine Teilfolge mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k ,$$

die o.B.d.A. die Eigenschaften (6a), (6b), (6c) besitze und für die

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_{k_i} = \tilde{h}$$

gelte. Dann ist unter Berücksichtigung des Lemma 6.1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i} = \tilde{\mu} = \mu(M, p) > 0 .$$

Weiter folgt aus dem Verfahren, daß für die monoton fallende, beschränkte Folge $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \varepsilon > 0$$

gilt. Schließlich folgt die Beziehung

$$M(p) < M ,$$

und damit offensichtlich

$$\mu(M(p), p) \geq \mu(M, p) > 0$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_{k_i} = \tilde{h} \geq h(M, p, q) > 0 .$$

Denn sei $z \in M(p)$ und wählen wir eine Folge $\{z_{k_i}\}$ mit

$$z_{k_i} \in \tilde{M}_{\delta_{k_i}} \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} z_{k_i} = z ,$$

so existiert wegen

$$|f(z_{k_i}) - p_{k_i}(z_{k_i})| \geq |f(z) - p(z)| - |f(z_{k_i}) - f(z)| - \\ - |p(z) - p(z_{k_i})| - |p(z_{k_i}) - p_{k_i}(z_{k_i})|$$

ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq i_0$

$$|f(z_{k_i}) - p_{k_i}(z_{k_i})| \geq L - \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Weiter existiert ein $i_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq i_1$

$$L \geq E_{k_i} - \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Somit folgt für $i \geq i_2 = \max(i_0, i_1)$

$$|f(z_{k_i}) - p_{k_i}(z_{k_i})| \geq L - \frac{\varepsilon}{2} \geq E_{k_i} - \varepsilon.$$

Also ist für $i \geq i_2$

$$z_{k_i} \in M_{k_i} \quad \text{und damit} \quad z \in M.$$

Insgesamt folgt mit

$$p_{k_i+1} = p_{k_i} + h_{k_i} \cdot q_{k_i}$$

für $i = 1, 2, \dots$

$$\|f - p\|_E \leq \|f - p_{k_i+1}\|_E = \|f - p_{k_i} - h_{k_i} \cdot q_{k_i}\|_E$$

und damit durch Grenzübergang $i \rightarrow \infty$

$$\|f - p\|_E \leq \|f - p - \tilde{h} \cdot q\|_E = \|f - p - h \cdot q\|_E.$$

Das ist aber ein Widerspruch, da unter der Annahme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$$

q wegen $\mu(M(p), p) > 0$ eine Abstiegsrichtung für $f-p$ darstellt, also

$$\|f - p - h \cdot q\|_E < \|f - p\|_E$$

ist.

Aus Lemma 6.3 folgt sofort

$$M \subset M(p)$$

und schließlich der

Satz 6.1:

Es ist

$$L = \inf_{p \in V_n} \|f - p\|_E$$

und p ist Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n .

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß p nicht Minimallösung an f sei. Dann ist aber das Optimierungsproblem (1) lösbar mit

$$\mu(M(p), p) > 0.$$

Wegen $M \subset M(p)$ gilt bzgl. (1) weiter

$$\mu(M, p) \geq \mu(M(p), p) > 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 6.3.

Somit haben wir bewiesen, daß jeder Häufungspunkt der Folge $\{p_k\}$ eine Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n ist. Die Minimallösung ist aber eindeutig: $\{p_k\}$ besitzt nur einen Häufungspunkt.

Die Menge $M(p_k)$ wird für $k = 1, 2, \dots$ im allgemeinen endlich sein. Ist dieses nicht der Fall, so treten bei der praktischen Durchführung des Verfahrens in der obigen Fassung Schwierigkeiten auf. Diese Schwierigkeiten lassen sich beheben, indem wir

$$M_k = M_{\varepsilon_k} \cap \tilde{M}_{\delta_k}$$

setzen und den zweiten Schritt des Verfahrens auf die folgende Weise modifizieren:

(2) (a) $\mu_k = 0$:

Setze

$$\epsilon_{k+1} = \frac{\epsilon_k}{2} \quad , \quad p_{k+1} = p_k$$

und gehe zu (1) .

(b) $\mu_k > 0$:

Setze

$$\epsilon_{k+1} = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{2} & , \text{ falls } \mu_k \leq \epsilon_k \\ \epsilon_k & \text{ falls } \mu_k > \epsilon_k \end{cases}$$

und

$$p_{k+1} = p_k + h_k \cdot q_k \quad ,$$

wobei h_k das minimale $\tilde{h}_k$, $\tilde{h}_k \in \mathbb{R}$, $\tilde{h}_k \geq 0$, ist, das der Beziehung

$$\|f - p_k - \tilde{h}_k \cdot q_k\| = \min$$

genügt. Gehe zu (1).

Der Konvergenzbeweis verläuft mit geringfügigen Modifikationen analog wie bei dem Ausgangsverfahren.

Abschließend sei noch auf zwei Möglichkeiten hingewiesen, im Laufe des Verfahrens untere Schranken $\tau_k(f)$ für die Minimalabweichung zu gewinnen.

- (i) Man wähle eine aus $n+2$ Punkten $z_\mu \in E$ bestehende Menge M^* mit

$$M(p_k) \subset M^* \text{ und } M^* \subset M_k, \text{ falls } |M(p_k)| < n+2$$

bzw.

$$M^* \subset M(p_k), \text{ falls } |M(p_k)| \geq n+2.$$

Auf M^* berechne man dann mit Hilfe des Satzes 5.1 die Minimallösung an f bzgl. V_n . Setzen wir

$$\tau_k(f) = |\lambda|,$$

so ist $\tau_k(f)$ offensichtlich eine untere Schranke für die Minimalabweichung $\rho_{V_n}(f)$.

- (ii) Das Verfahren selbst liefert, allerdings an nicht festzusetzenden Stellen, untere Schranken $\tau_k(f)$. Denn ergibt sich im k 'ten Schritt des Verfahrens nach Lösung der linearen Optimierungsaufgabe (1), daß die Größe

$$\nu_k = 0$$

ist, dann kann die Fehlerfunktion $f - p_k$ nicht gleichzeitig an allen Punkten $z \in M_k$ heruntergedrückt werden. Sei $\tilde{z} \in M_k$ ein Punkt mit

$$|f(\tilde{z}) - p_k(\tilde{z})| \leq |f(z) - p_k(z)|$$

für alle $z \in M_k$, dann ergibt sich eine untere Schranke $\tau_k(f)$ für die Minimalabweichung $\rho_{V_n}(f)$ durch

$$\tau_k(f) = |f(\tilde{z}) - p_k(\tilde{z})|.$$

7. Ein Abstiegsverfahren zur Konstruktion von polynomialen Minimallösungen bzgl. einer Punktmenge des Einheitskreises

Bevor wir im nächsten Kapitel ein zweites Verfahren, ein Aufstiegsverfahren, zur Konstruktion von polynomialen Minimallösungen aus V_n an Funktionen $f \in H(B_E)$ bzgl. B_E angeben, beschreiben wir zunächst das Verfahren $D(N, \tilde{p}; p)$, welches uns das Polynom bester Approximation aus V_n auf der Punktmenge

$$N = \{z_j; z_j \in E, j=1, 2, \dots, m, m > n+2, z_j \neq z_i \text{ für } j \neq i\}$$

liefert. Hierzu modifizieren wir das im vorhergehenden Kapitel angegebene Verfahren auf die folgende Weise.

Zu vorgegebener Punktmenge

$$N_\zeta = \{z_j; z_j \in E, j=1, 2, \dots, r, r \geq 1, z_j \neq z_i \text{ für } j \neq i\}$$

und zu vorgegebenem $p_k \in V_n$ sei $O(N_\zeta, p_k; q_k, \mu_k)$ das lineare Optimierungsproblem

Maximiere die Zahl $\tilde{\mu}_k$ unter den Nebenbedingungen

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z)} - \overline{p_k(z)})q_k(z) - \tilde{\mu}_k \geq 0 \quad \text{für } z \in N_\zeta,$$

$$|a_j^{(k)}| \leq 1, \quad |b_j^{(k)}| \leq 1 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n,$$

wobei

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^n (a_j^{(k)} + i \cdot b_j^{(k)}) z^j$$

mit $a_j^{(k)}, b_j^{(k)} \in \mathbb{R}$ für $j = 0, 1, \dots, n$ sei. Das maximale $\tilde{\mu}_k$ nennen wir μ_k .

Die Aufgabe $O(N_\zeta, p_k; q_k, \mu_k)$ besitzt, wie wir gesehen hatten, mindestens eine Lösung. Setzen wir weiter

$$F_k = \|f - p_k\|_N,$$

$$N(p_k) = \{z; z \in N, |f(z) - p_k(z)| = F_k\},$$

$$N_{\epsilon_k} = \{z; z \in N, |f(z) - p_k(z)| \geq F_k - \epsilon_k\},$$

wobei wir im folgenden an die Größe $\epsilon_k \in \mathbb{R}$ generell die Forderung $0 < \epsilon_k \leq \frac{1}{2}\epsilon_k$ stellen, so verläuft der k 'te Schritt des Verfahrens $D(N, \tilde{p}; p)$ folgendermaßen:

(1) Löse die Aufgabe

$$O(N_{\epsilon_k}, p_k; q_k, \mu_k) .$$

(2) (a) $\mu_k = 0$:

$$(\alpha) N_{\epsilon_k} = N(p_k) :$$

Setze $p = p_k$ und p ist die Minimallösung an f aus V_n auf N .

$$(\beta) N_{\epsilon_k} \neq N(p_k) :$$

Setze $N_{\epsilon_k} = N(p_k)$ und löse (1).

(i) $\mu_k = 0$:

Setze $p = p_k$ und p ist die Minimallösung an f aus V_n auf N .

(ii) $\mu_k > 0$:

Setze

$$\epsilon_{k+1} = \frac{\epsilon_k}{2} \quad \text{und} \quad p_{k+1} = p_k$$

und gehe zu (1).

(b) $\mu_k > 0$:

Setze

$$\epsilon_{k+1} = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{2} & , \text{ falls } \mu_k \leq \epsilon_k \\ \epsilon_k & , \text{ falls } \mu_k > \epsilon_k \end{cases}$$

und

$$p_{k+1} = p_k + h_k \cdot q_k$$

mit

$$h_k = \min\left(\frac{\mu_k}{\|q_k\|_N^2}, \frac{\epsilon_k}{2} \cdot \frac{2\|f - p_k\|_N - \epsilon_k}{\mu_k + r_k}\right).$$

Hierbei ist

$$\tilde{r}_k = \min(\operatorname{Re}(\overline{f(z) - p_k(z)})q_k(z), z \in N, z \notin_{\epsilon_k})$$

und

$$r_k = \begin{cases} -\tilde{r}_k & , \text{ falls } \tilde{r}_k < 0 \\ 0 & , \text{ falls } \tilde{r}_k \geq 0 \end{cases}.$$

Zunächst beweisen wir den

Satz 7.1:

Es sei $\mu_k > 0$. Dann gilt mit

$$h_k = \min\left(\frac{\epsilon_k}{\|q_k\|_N^2}, \frac{\epsilon_k}{2} \cdot \frac{2\|f - p_k\|_N - \mu_k}{\mu_k + r_k}\right)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} (7a) \quad \|f - p_k - h_k \cdot q_k\|_N^2 &= \|f - p_{k+1}\|_N^2 \\ &\leq \|f - p_k\|_N^2 - h_k \cdot \mu_k. \end{aligned}$$

Beweis:

Es ist offensichtlich $h_k > 0$. Zum Beweis der Beziehung (7a) machen wir die folgenden beiden Fallunterscheidungen:

(1) $z \in N_{\epsilon_k}$:

Dann gilt mit $\eta_k = f - p_k$

$$\begin{aligned} |\eta_k(z) - h_k \cdot q_k(z)|^2 &= \\ &= |\eta_k(z)|^2 + h_k^2 \cdot |q_k(z)|^2 - 2h_k \cdot \operatorname{Re}(\overline{\eta_k(z)})q_k(z) \\ &\leq \|\eta_k\|_N^2 + h_k^2 \cdot \|q_k\|_N^2 - 2h_k \cdot \mu_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|\eta_k\|_N^2 + h_k (h_k \cdot \|q_k\|_N^2 - 2\mu_k) \\
 &\leq \|\eta_k\|_N^2 + h_k (\mu_k - 2\mu_k) \\
 &= \|\eta_k\|_N^2 - h_k \cdot \mu_k .
 \end{aligned}$$

(2) $z \in N$, $z \notin N_{\epsilon_k}$:

Dann gilt wegen $|\eta_k(z)| \leq \|\eta_k\|_N - \epsilon_k$

$$\begin{aligned}
 |\eta_k(z) - h_k \cdot q_k(z)|^2 &= \\
 &= |\eta_k(z)|^2 + h_k^2 \cdot |q_k(z)|^2 - 2h_k \cdot \operatorname{Re}(\overline{\eta_k(z)}) q_k(z) \\
 &\leq \|\eta_k\|_N^2 + \epsilon_k^2 - 2\epsilon_k \cdot \|\eta_k\|_N + h_k^2 \cdot \|q_k\|_N^2 + 2h_k \cdot r_k \\
 &= \|\eta_k\|_N^2 - \epsilon_k (2\|\eta_k\|_N - \epsilon_k) + 2h_k \cdot r_k + h_k^2 \cdot \|q_k\|_N^2 \\
 &\leq \|\eta_k\|_N^2 - 2h_k (\mu_k + r_k) + 2h_k \cdot r_k + h_k^2 \cdot \|q_k\|_N^2 \\
 &= \|\eta_k\|_N^2 - 2h_k \cdot \mu_k + h_k^2 \cdot \|q_k\|_N^2 \\
 &\leq \|\eta_k\|_N^2 - h_k \cdot \mu_k .
 \end{aligned}$$

Insbesondere folgt also

$$\|f - p_{k+1}\|_N < \|f - p_k\|_N .$$

Wir beweisen nun die Konvergenz des Verfahrens.

(1) Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab. Dann ist aber die Minimallösung erreicht und wir sind fertig.

(2) Das Verfahren bricht nicht ab:

Dann gilt für $k = 1, 2, \dots$

$$F_k \geq F_{k+1} \geq \rho_V^N(f) \geq 0$$

und

$$\frac{1}{k} \cdot F_k \geq \epsilon_k \geq \epsilon_{k+1} > 0 .$$

Hieraus folgt aber die Existenz von

$$(7b) \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \geq \rho_{V_n}^N(f)$$

und

$$(7c) \quad \epsilon = \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k \geq 0.$$

Weiter existiert offensichtlich eine Teilfolge $\{k_1\}$ mit

$$(7d) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_1} = p \in V_n \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} q_{k_1} = q \in V_n.$$

$$(a) \quad L = \|f - p\|_N = 0 :$$

Dann ist p offensichtlich das Polynom bester Approximation an f aus V_n auf N und wir sind wiederum fertig.

$$(b) \quad L = \|f - p\|_N > 0 :$$

Dann gilt das

Lemma 7.1:

Es ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = \epsilon = 0.$$

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gelte

$$\epsilon > 0.$$

Dann existiert aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $k \geq n_0$ gilt

$$0 < \epsilon \leq \epsilon_k \leq \nu_k.$$

Setzen wir wiederum $\eta_k = f - p_k$, so gilt wegen

$$\|q_k\|_N = \left\| \sum_{j=0}^n a_j^{(k)} z^j \right\|_N \leq \sum_{j=0}^n |a_j^{(k)}| \cdot |z|^j \leq 2(n+1)$$

für $z \in N_{\epsilon_k}$

$$\begin{aligned}\mu_k^2 &\leq [\operatorname{Re} \overline{\eta_k(z)} q_k(z)]^2 \\ &\leq [\operatorname{Re} \overline{\eta_k(z)} q_k(z)]^2 + [\operatorname{Im} \overline{\eta_k(z)} q_k(z)]^2 \\ &= |\eta_k(z)|^2 \cdot |q_k(z)|^2 \leq \|\eta_k\|_N^2 \cdot \|q_k\|_N^2,\end{aligned}$$

also

$$\mu_k \leq \|\eta_k\|_N \cdot \|q_k\|_N \leq 2(n+1) \cdot \|\eta_k\|_N$$

und analog

$$r_k \leq 2(n+1) \cdot \|\eta_k\|_N.$$

Mit diesen beiden Beziehungen folgt

$$\begin{aligned}h_k &= \min\left(\frac{\mu_k}{\|q_k\|_N^2}, \frac{\varepsilon_k}{2} \cdot \frac{2\|\eta_k\|_N - \varepsilon_k}{\mu_k + r_k}\right) \\ &\geq \min\left(\frac{\varepsilon}{4(n+1)^2}, \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\|\eta_k\|_N}{4(n+1) \cdot \|\eta_k\|_N}\right).\end{aligned}$$

Für $k = 1, 2, \dots$ folgt weiter

$$h_k \geq \min\left(\frac{\varepsilon}{4(n+1)^2}, \frac{\varepsilon}{8(n+1)}\right) = \frac{\varepsilon \cdot \theta}{4(n+1)} > 0$$

mit

$$\theta = \min\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right)$$

Es gilt also für $k = 1, 2, \dots$

$$(7e) \quad h_k \cdot \mu_k \geq \frac{\varepsilon^2 \cdot \theta}{4(n+1)} > 0.$$

Nach Voraussetzung gilt aber

$$F_{k+1}^2 \leq F_k^2 - \mu_k \cdot h_k ,$$

was wegen (7b) o.B.d.A.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k \cdot h_k = 0$$

impliziert. Das ist ein Widerspruch zu (7e).

Aus Lemma 7.1 folgt weiter die Existenz einer Teilfolge $\{k_i\}$ mit der Eigenschaft (7d), so daß

$$(7f) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} N_{\epsilon_{k_i}} = \tilde{N} < N(p)$$

und

$$(7g) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k_i} = \tilde{\mu} = 0$$

gilt.

Schließlich gilt der

Satz 7.2:

Es ist

$$L = \|f - p\|_N = \rho_{V_n}^N(f)$$

und p ist Minimallösung an f auf N bzgl. V_n .

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gelte

$$L > \rho_{V_n}^N(f) .$$

Sei $\tilde{p} \in V_n$ die Minimallösung an f auf N und sei $\{k_i\}$ eine Teilfolge mit den Eigenschaften (7d), (7f) und (7g), so folgt auf Grund unserer Annahme für $i = 1, 2, \dots$

$$p_{k_i} \neq p \quad \text{und insbesondere} \quad p \neq \tilde{p} .$$

Dann existiert aber ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\theta > 0$, so daß mit

$$p_{k_1}(z) = \sum_{j=0}^n (c_j^{(k_1)} + i \cdot d_j^{(k_1)}) \cdot z^j$$

und

$$\tilde{p}(z) = \sum_{j=0}^n (\tilde{c}_j + i \cdot \tilde{d}_j) \cdot z^j, \\ c_j^{(k_1)}, d_j^{(k_1)}, c_j, d_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

für alle $i = 1, 2, \dots$

$$\theta \geq \max_j (|c_j^{(k_1)} - \tilde{c}_j|, |d_j^{(k_1)} - \tilde{d}_j|) > 0, \\ j = 0, 1, \dots, n,$$

gilt. Es folgt

$$\mu_{k_1} = \min_{z \in N_{\epsilon_{k_1}}} (\operatorname{Re}(\overline{f(z)} - p_{k_1}(z)) q_{k_1}(z)) \\ \geq \min_{z \in N_{\epsilon_{k_1}}} (\operatorname{Re}(\overline{f(z)} - p_{k_1}(z)) \cdot \frac{\tilde{p}(z) - p_{k_1}(z)}{\theta})$$

und schließlich durch Grenzübergang $i \rightarrow \infty$

$$0 = \tilde{\mu} = \min_{z \in \tilde{N} \subset N(p)} \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - p(z)) q(z) \\ \geq \min_{z \in \tilde{N}} \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - p(z)) \cdot \frac{\tilde{p}(z) - p(z)}{\theta}.$$

Das ist aber ein Widerspruch; denn setzen wir

$$Q_n(z) = \{q; q(z) = \sum_{j=0}^n (a_j + i \cdot b_j) z^j, |a_j| \leq 1, |b_j| \leq 1, j=0, 1, \dots, n\}$$

dann ist für alle $i = 1, 2, \dots$

$$\frac{\tilde{p} - p_{k_1}}{\theta} \in Q_n \quad \text{und insbesondere} \quad \frac{\tilde{p} - p}{\theta} \in Q_n,$$

und es gilt wegen

$$\|f - p_{k_1} - \theta \cdot \frac{\tilde{p} - p_{k_1}}{\theta}\|_N = \|f - \tilde{p}\|_N < \|f - p_{k_1}\|_N$$

offensichtlich

$$\min_{z \in N(p_{k_1})} \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - \overline{p_{k_1}(z)}) \cdot \frac{\tilde{p}(z) - p_{k_1}(z)}{\theta} > 0$$

und somit schließlich aus dem gleichen Grund

$$\min_{z \in \tilde{N}} \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - \overline{p(z)}) \cdot \frac{\tilde{p}(z) - p(z)}{\theta} > 0.$$

Somit haben wir wiederum gezeigt, daß jeder Häufungspunkt p der Folge $\{p_k\}$ Minimallösung an f auf N bzgl. V_n ist. Die Minimallösung ist aber eindeutig: Die Folge $\{p_k\}$ besitzt genau einen Häufungspunkt.

8. Ein Aufstiegsverfahren zur Ermittlung von polynomialen Minimallösungen bzgl. der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

Bevor wir das Aufstiegsverfahren angeben, beweisen wir noch einige vorbereitende Aussagen. Vorgegeben sei eine Menge

$$N_k = \{z_j; z_j \in E, j=1,2,\dots,2n+4, z_j \neq z_1 \text{ für } j \neq 1\}$$

und ein Polynom $p_k \in V_n$. Setzen wir wieder

$$E_k = \|f - p_k\|_E, \quad ,$$

$$M(p_k) = \{z; z \in E, |f(z) - p_k(z)| = E_k\}$$

und weiter

$$F_k = \|f - p_k\|_{N_k}, \quad ,$$

$$N(p_k) = \{z; z \in N_k, |f(z) - p_k(z)| = F_k\}, \quad ,$$

dann gilt der

Satz 8.1:

p_k sei die Minimallösung an f auf N_k bzgl. V_n . Weiter sei

$$E_k = F_k + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi > 0, \quad ,$$

und es existiere ein $z_r \in N_k$ mit

$$|f(z_r) - p_k(z_r)| = F_k - \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad \zeta > 0.$$

Dann gilt mit

$$N_{k+1} = \{N_k \cup \{\tilde{z}\} / \{z_r\}, \quad \tilde{z} \in M(p_k), \text{ beliebig},$$

für die Minimallösung p_{k+1} an f auf N_{k+1} bzgl. V_n

$$\|f - p_k\|_{N_k} < \|f - p_{k+1}\|_{N_{k+1}}.$$

Beweis:

p_k ist Minimallösung an f bzgl. V_n auch auf $N(p_k)$. Nehmen wir nämlich an, dieses sei nicht der Fall, dann besitzt die Aufgabe

$$O(N(p_k), p_k; q_k, \nu_k)$$

eine Lösung mit $\nu_k > 0$. Aus früheren Überlegungen folgt hieraus die Existenz eines $h_k \in \mathbb{R}$, $h_k > 0$, mit

$$\|f - p_k - h_k \cdot q_k\|_{N_k} < \|f - p_k\|_{N_k}$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung an p_k . Somit folgt offensichtlich

$$\|f - p_k\|_{N_k} = \|f - p_k\|_{N(p_k)} \leq \|f - p_{k+1}\|_{N_{k+1}}.$$

Es gilt sogar

$$\|f - p_k\|_{N_k} = \|f - p_k\|_{N(p_k)} < \|f - p_{k+1}\|_{N_{k+1}}.$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es sei

$$\|f - p_k\|_{N(p_k)} = \|f - p_{k+1}\|_{N_{k+1}}.$$

Sei $\tilde{p}_{k+1}$ die Minimallösung an f bzgl. V_n auf

$$\tilde{N}_{k+1} = N(p_k) \cup \{\tilde{z}\},$$

dann folgt aus

$$\|f - p_k\|_{N(p_k)} \leq \|f - \tilde{p}_{k+1}\|_{\tilde{N}_{k+1}} \leq \|f - p_{k+1}\|_{N_{k+1}}$$

unter Berücksichtigung unserer Annahme

$$\|f - p_k\|_{N(p_k)} = \|f - \tilde{p}_{k+1}\|_{\tilde{N}_{k+1}}.$$

Das heißt aber, daß wegen $\tilde{N}_{k+1} \supset N(p_k)$ das Polynom $\tilde{p}_{k+1}$ auch Minimallösung auf $N(p_k)$ ist. Wegen

$$|f(\tilde{z}) - p_k(\tilde{z})| > \|f - p_k\|_{N(p_k)} = \|f - \tilde{p}_{k+1}\|_{\tilde{N}_{k+1}} \geq |f(\tilde{z}) - \tilde{p}_{k+1}(\tilde{z})|$$

ist aber $p_k \neq \tilde{p}_{k+1}$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Minimallösung an f auf $N(p_k)$ bzgl. V_n .

Weiter gilt der

Satz 8.2:

p_k sei die Minimallösung an f auf N_k bzgl. V_n und es gelte

$$|f(z) - p_k(z)| = F_k$$

für alle $z \in N_k$. Weiter sei $q_k \in V_n$ und μ_k eine Lösung der Aufgabe $O(N_k, p_k; q_k, \mu_k)$. Es gebe ein $z_r \in N_k$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_r)} - p_k(z_r)) q_k(z_r) = \xi > 0, \quad ,$$

dann ist p_k auch Minimallösung an f bzgl. V_n auf

$$\tilde{N}_k = N_k / \{z_r\}.$$

Beweis:

Da p_k nach Voraussetzung Minimallösung auf N_k ist, gilt offensichtlich $\mu_k = 0$. Es gibt also mindestens ein $z_s \in N_k$, $s \neq r$, mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_s)} - p_k(z_s)) q_k(z_s) = 0.$$

Zum Nachweis unserer Behauptung führen wir wiederum einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an: p_k sei nicht Minimallösung auf $\tilde{N}_k$. Dann besitzt aber die Aufgabe $O(\tilde{N}_k, p_k; \tilde{q}_k, \tilde{\mu}_k)$ eine Lösung mit $\tilde{\mu}_k > 0$, es gilt also

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z)} - p_k(z)) \tilde{q}_k(z) \geq \tilde{\mu}_k \quad \text{für } z \in \tilde{N}_k.$$

Weiter gelte

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_r)} - p_k(z_r)) \tilde{q}_k(z_r) = -\sigma,$$

wobei nach Voraussetzung $\sigma \geq 0$ ist. Setzen wir

$$q_\alpha(z) = \alpha \cdot q_k(z) + (1 - \alpha) \cdot \tilde{q}_k(z),$$

so erfüllt q_α für jedes α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ die "Koeffizientenbedingung" der Aufgabe $O(N_k, p_k; q_k, \mu_k)$. Mit

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_k(z_j) &= \operatorname{Re}(\overline{f(z_j)} - p_k(z_j)) q_\alpha(z_j) \\ &= \alpha \cdot \operatorname{Re}(\overline{f(z_j)} - p_k(z_j)) q_k(z_j) + (1 - \alpha) \operatorname{Re}(\overline{f(z_j)} - p_k(z_j)) \tilde{q}_k(z_j) \end{aligned}$$

folgt, wenn

$$\alpha = \frac{2\sigma + \xi}{2(\sigma + \xi)} \quad , \quad \text{und somit} \quad (1 - \alpha) = \frac{\xi}{2(\sigma + \xi)} \quad ,$$

gesetzt wird, für $z_j \in N_k$, $j \neq r$,

$$\hat{\mu}_k(z_j) \geq \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot \tilde{\mu}_k = \frac{\xi \cdot \tilde{\mu}_k}{2(\sigma + \xi)} > 0$$

und für $z_j = z_r \in N_k$

$$\hat{\mu}_k(z_r) = \alpha \cdot \xi - (1 - \alpha) \cdot \sigma = \frac{\xi}{2} > 0 \quad .$$

Mit

$$\zeta = \min\left(\frac{\xi \cdot \tilde{\mu}_k}{2(\sigma + \xi)} \quad , \quad \frac{\xi}{2}\right)$$

folgt somit für $z_j \in N_k$

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_j)} - p_k(z_j)) q_k(z_j) \geq \zeta > 0 \quad .$$

Das ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß mindestens ein $z_s \in N_k$ existiert mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_s)} - p_k(z_s)) q_k(z_s) = 0 \quad .$$

Die Aufgabe $O(N_0, p_k; q_k, \mu_k)$ ist ein lineares Optimierungsproblem. Wir setzen im folgenden voraus, daß wir dieses Problem, was auch für die praktische Durchführung als sinnvoll erscheint, mit Hilfe des Simplex-Algorithmusses (siehe z.B. Collatz-Wetterling[]) lösen. Dann gilt schließlich der

Satz 8.3:

p_k sei Minimallösung an f auf N_k bzgl. V_n und es gelte

$$|f(z) - p_k(z)| = F_k$$

für alle $z \in N_k$. Weiter sei $q_k \in V_n$ und $\mu_k \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Aufgabe $O(N_k, p_k; q_k, \mu_k)$. Wir setzen - dem Simplex-Algorithmus angemessen - voraus, daß die betrachtete Lösung einer Ecke des dem vorgegebenen Restriktionensystem entsprechenden Simplexes zugeordnet ist. Dann existiert ein $z_r \in N_k$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_r)} - p_k(z_r)) q_k(z_r) = \xi > 0 \quad .$$

Beweis:

Mit

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^n (a_j + i \cdot b_j) z^j$$

kann $\operatorname{Re}(\overline{f(z_i)} - p_k(z_i)) q_k(z_i)$ für $i = 1, 2, \dots, 2n+4$ dargestellt werden als

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_i)} - p_k(z_i)) q_k(z_i) = \sum_{j=0}^n (A_j^{(i)} \cdot a_j + B_j^{(i)} \cdot b_j),$$

wobei $A_j^{(i)}, B_j^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, 2n+4$, eindeutig bestimmte, von a_j und b_j unabhängige reelle Konstanten sind. Somit kann in der Aufgabe $O(N_k, p_k; q_k, v_k)$ das Restriktionensystem geschrieben werden als

$$(8a) \quad \sum_{j=0}^n A_j^{(i)} \cdot a_j + \sum_{j=0}^n B_j^{(i)} \cdot b_j - v_k \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 2n+4.$$

Nach Einführen der Schlupfvariablen $v_1, v_2, \dots, v_{2n+4}$, $v_j \geq 0$ für $j = 1, 2, \dots, 2n+4$, und Interpretation der Variablen a_j bzw. b_j als Differenz zweier vorzeichenbeschränkter Variablen

$$a_j = a_j^+ - a_j^- \quad , \quad a_j^+ \geq 0 \quad , \quad a_j^- \geq 0 \quad ,$$

bzw.

$$b_j = b_j^+ - b_j^- \quad , \quad b_j^+ \geq 0 \quad , \quad b_j^- \geq 0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n \quad ,$$

wird das System (8a) übergeführt in das Gleichungssystem (8b)

$$\sum_{j=0}^n A_j^{(i)} a_j^+ + \sum_{j=0}^n (-A_j^{(i)}) a_j^- + \sum_{j=0}^n B_j^{(i)} b_j^+ + \sum_{j=0}^n (-B_j^{(i)}) b_j^- - v_k - v_i = 0, \\ i = 1, 2, \dots, 2n+4 \quad .$$

Auf Grund des Simplex-Algorithmusses gilt für $j = 0, 1, \dots, n$

$$a_j^+ = 0 \vee a_j^- = 0 \quad \text{und} \quad b_j^+ = 0 \vee b_j^- = 0 \quad .$$

Nehmen wir o.B.d.A. an, daß

$$a_j^- = b_j^- = 0 \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

gilt, dann ergibt sich (8b) zu

$$\sum_{j=0}^n A_j^{(1)} a_j^+ + \sum_{j=0}^n B_j^{(1)} b_j^+ + (-\mu_k) + (-v_1) = 0 \quad ,$$

bzw. zu

$$D \cdot v = 0$$

mit $-r = 2n+4$ gesetzt -

$$D = \begin{pmatrix} A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & \dots & A_n^{(1)} & B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_n^{(1)} & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_0^{(2)} & A_1^{(2)} & \dots & A_n^{(2)} & B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_n^{(2)} & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0^{(r)} & A_1^{(r)} & \dots & A_n^{(r)} & B_0^{(r)} & B_1^{(r)} & \dots & B_n^{(r)} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$v' = (a_0^+, a_1^+, \dots, a_n^+, b_0^+, b_1^+, \dots, b_n^+, -\mu_k, -v_1, -v_2, \dots, -v_r).$$

Sei $x \in \mathbb{R}^{2n+4}$ eine Ecke des betrachteten Simplexes, auf der μ_k das Maximum annimmt, so existiert eine Basis von x von genau $2n+4$ linear unabhängigen Spaltenvektoren von D (siehe z.B. Collatz-Wetterling [5]). Hieraus folgt aber, daß mindestens eine der zu den Schlupfvariablen gehörenden Spalten von D zu der Basis von x gehört, also linear unabhängig von den übrigen ist. Es sei o.B.d.A. der $(2n+4)$ 'te Spaltenvektor, dann gilt $v_1 > 0$ und damit

$$\sum_{j=0}^n A_j^{(1)} a_j^+ + \sum_{j=0}^n B_j^{(1)} b_j^+ + \underbrace{(-\mu_k)}_{=0} + (-v_1) = 0 \quad ,$$

also

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z_1)} - p_k(z_1)) q_k(z_1) = v_1 > 0 \quad .$$

Setzen wir weiter

$$N_k^* = \{z^*; z^* \in N_k, |f(z^*) - p_k(z^*)| \leq |f(z) - p_k(z)| \text{ für alle } z \in N_k\}$$

und

$$\hat{N}_k = \{\hat{z}; \hat{z} \in N_k, \operatorname{Re}(\overline{f(\hat{z})} - p_k(\hat{z})) q_k(\hat{z}) \geq \operatorname{Re}(\overline{f(z)} - p_k(z)) q_k(z) \quad \forall z \in N_k\} \quad ,$$

so verläuft der k'te Schritt des Aufstiegsverfahrens folgendermaßen:

(1) Löse die Aufgabe $D(N_k, p_{k-1}; p_k)$.

(2) (a) $\|f - p_k\|_{N_k} = \|f - p_k\|_E$:

Dann ist offensichtlich p_k die Minimallösung an f bzgl. V_n auch auf E und damit auf B_E und wir sind fertig.

(b) $\|f - p_k\|_{N_k} < \|f - p_k\|_E$:

(a) Es gilt

$$|f(z) - p_k(z)| < \|f - p_k\|_{N_k}$$

für mindestens ein $z \in N_k$:

Setze

$$N_{k+1} = \{N_k \cup \{\tilde{z}\}\} / \{z^*\}$$

mit beliebigem $\tilde{z} \in M(p_k)$ und $z^* \in N_k^*$. Gehe zu (1).

(b) Es gilt

$$|f(z) - p_k(z)| = \|f - p_k\|_{N_k}$$

für alle $z \in N_k$:

Löse $O(N_k, p_k; q_k, u_k)$ und setze

$$N_{k+1} = \{N_k \cup \{\hat{z}\}\} / \{\hat{z}\}$$

mit beliebigem $\hat{z} \in M(p_k)$ und $\hat{z} \in \hat{N}_k$. Gehe zu (1).

Konvergenzbeweis:

Wir unterscheiden

(1) Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab. Dann ist aber die Minimallösung erreicht und wir sind fertig.

(2) Das Verfahren bricht nicht ab:

Dann erhalten wir Approximationen $p_k \in V_n$, für die auf Grund der Sätze 8.1, 8.2 und 8.3 gilt

$$F_1 < F_2 < \dots < F_k < F_{k+1} < \dots$$

Die Folge $\{N_k\}$ ist beschränkt. Somit existiert eine Teilfolge $\{k_i\}$ mit

$$(8c) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} N_{k_i} = N \quad .$$

Weiter gilt das

Lemma 8.1:

Es ist

$$n+2 \leq |N| \leq 2n+4 \quad .$$

Beweis:

Offensichtlich ist $|N| \leq 2n+4$. Für die Verifizierung der zweiten Aussage führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gelte

$$|N| = m < n+2 \quad .$$

Dann sei $p \in V_n$ ein festes Polynom, das f in den Punkten $z \in N$ interpoliert. p ist Minimallösung an f auf N und es gilt

$$\|f - p\|_N = 0 \quad .$$

Wir betrachten nun eine Folge $\{z_{k_i}\}$ mit

$$z_{k_i} \in N_{k_i} \quad \text{und} \quad |f(z_{k_i}) - p_{k_i}(z_{k_i})| = \|f - p\|_{N_{k_i}}$$

O.B.d.A. nehmen wir an, daß die z_{k_i} , $i = 1, 2, \dots$, so gewählt seien, daß die Folge konvergiert, daß also

$$\lim_{i \rightarrow \infty} z_{k_i} = \tilde{z} \in N$$

gilt. Sei weiter

$$\|f - p_2\|_{N_2} = c > 0 \quad ,$$

so existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq i_0$

$$|f(z_{k_i}) - f(\tilde{z})| < \frac{c}{2} \quad \text{und} \quad |f(\tilde{z}) - p(z_{k_i})| < \frac{c}{2}$$

gilt.

Es folgt für $i \geq i_0$

$$\begin{aligned} F_{k_1} &= \|f - p_{k_1}\|_{N_{k_1}} = \|f - p\|_{N_{k_1}} = |f(z_{k_1}) - p(z_{k_1})| \\ &\leq |f(z_{k_1}) - f(\tilde{z})| + |f(\tilde{z}) - p(z_{k_1})| < c, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu

$$c = F_2 < F_3 < \dots < F_{k_1} < \dots$$

Lemma 8.2:

Die Folge $\{k_i\}$ besitze die Eigenschaft (8c). Dann gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} = p = p(N), \quad (p(N) = \text{Minimallösung an } f \text{ auf } N).$$

Beweis:

Für $k = 1, 2, \dots$ gilt wegen

$$\|f - p_k\|_{N_k} \leq \|f\|_E$$

und

$$\|f - p_k\|_{N_k} \geq \|p_k\|_{N_k} - \|f\|_{N_k} \geq \|p_k\|_{N_k} - \|f\|_E$$

die Beziehung

$$(8d) \quad \|p_k\|_{N_k} \leq \|f - p_k\|_{N_k} + \|f\|_E \leq 2 \cdot \|f\|_E.$$

Setzen wir

$$Q = \{q; q(z) = \sum_{j=0}^n \beta_j z^j, \beta_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=0}^n |\beta_j| = 1\},$$

so folgt aus der Haarschen Bedingung

$$\min_{q \in Q} \|q\|_{N_{k_1}} = \gamma_{k_1} \geq \gamma > 0$$

mit

$$\gamma = \inf_i \min_{q \in Q} \|q\|_{N_{k_i}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Mit

$$p_{k_1}(z) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(k_1)} z^j$$

folgt

$$\left\| \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j^{(k_1)}}{\sum_{v=0}^n |\alpha_v^{(k_1)}|} \cdot z^j \right\|_{N_{k_1}} \geq \gamma > 0$$

und damit unter Berücksichtigung von (8d)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n |\alpha_j^{(k_1)}| &\leq \frac{1}{\gamma} \cdot \left\| \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(k_1)} z^j \right\|_{N_{k_1}} \\ &= \frac{1}{\gamma} \cdot \|p_{k_1}\|_{N_{k_1}} \leq \frac{2}{\gamma} \cdot \|f\|_E < \infty \end{aligned}$$

Das heißt aber, daß für $i = 1, 2, \dots$ die Koeffizienten von p_{k_i} beschränkt sind. Dann ist aber auch p_{k_i} für $i = 1, 2, \dots$ auf E beschränkt und die Folge $\{p_{k_i}\}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt p . Es sei nun $\{k_{i_j}\}$ eine Teilfolge mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_{k_{i_j}} = p$$

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \geq j_0$

$$\|f - p\|_N \leq \|f - p\|_{N_{k_{i_j}}} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\|f - p(N)\|_{N_{k_{i_j}}} \leq \|f - p(N)\|_N + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und}$$

$$\|p_{k_{i_j}} - p\|_{N_{k_{i_j}}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Es folgt für $j \geq j_0$

$$\begin{aligned}
 \|f - p\|_N &\leq \|f - p\|_{N_{k_{1j}}} + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\leq \|f - p_{k_{1j}}\|_{N_{k_{1j}}} + \|p_{k_{1j}} - p\|_{N_{k_{1j}}} + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\leq \|f - p(N)\|_{N_{k_{1j}}} + \frac{2\varepsilon}{3} \\
 &\leq \|f - p(N)\|_N + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Da andererseits

$$\|f - p(N)\|_N \leq \|f - p\|_N$$

gilt, folgt somit

$$\|f - p(N)\|_N = \|f - p\|_N$$

und daraus schließlich wegen $|N| \geq n+2$

$$p = p(N).$$

Insbesondere folgt, daß jeder Häufungspunkt p der Folge $\{p_{k_1}\}$ Minimallösung an f auf N ist. Die Minimallösung ist aber eindeutig: Die Folge $\{p_{k_1}\}$ besitzt genau einen Häufungspunkt.

Lemma 8.3:

Es gibt ein $c > 0$ mit

$$\|p_k\|_E \leq c < \infty$$

für alle $k = 1, 2, \dots$.

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß eine Teilfolge $\{k_j\}$ existiert mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|p_{k_j}\|_E = \infty.$$

Betrachten wir die zugehörige Folge $\{N_{k_j}\}$, so existiert eine Teilfolge $\{k_{j_i}\} \subset \{k_j\}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} N_{k_{j_i}} = \tilde{N}$$

und es ist

$$n+2 \leq |\tilde{N}| \leq 2n+4 .$$

Aus Lemma 8.2 folgt dann

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_{j_i}} = \tilde{p} = p(\tilde{N}) ,$$

also ein Widerspruch.

Die monoton wachsende Folge $\{F_k\}$ ist beschränkt, es ist also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = L .$$

Schließlich folgt der

Satz 8.4:

Es ist

$$L = \min_{q \in V_n} \|f - q\|_E = \rho_{V_n}(f)$$

und die Folge $\{p_k\}$ konvergiert gegen die Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n .

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es sei

$$L < \rho_{V_n}(f) .$$

Sei p ein beliebiger Häufungspunkt der Folge $\{p_k\}$, dann gilt wegen Lemma 8.3

$$\|p\|_E < \infty .$$

$\{k_i\}$ sei eine Teilfolge mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} = p ,$$

die o.B.d.A. so gewählt sei, daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} N_{k_i} = \tilde{N}$$

gilt. Dann ist bei Berücksichtigung von Lemma 8.1

$$n+2 \leq |\tilde{N}| \leq 2n+4 .$$

Auf Grund unserer Annahme gilt dann

$$\|f - p\|_E > \|f - p\|_N .$$

Aus den Sätzen 8.2 und 8.3 folgt für $k = 1, 2, \dots$, daß p_k bei geeignet gewähltem $z_k^* \in N_k$ bereits Minimallösung auf

$$\hat{N}_k = N_k / \{z_k^*\}$$

ist. Die Teilfolge $\{k_i\}$ sei o.B.d.A. weiter so gewählt, daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{N}_{k_i} = \hat{N} \subset \tilde{N}$$

gilt. Dann ist p Minimallösung auch auf $\hat{N}$. Setzen wir

$$N_{k_i+1} = \hat{N}_{k_i} \cup \{\tilde{z}_{k_i}\} ,$$

wobei $\tilde{z}_{k_i} \in E$ der vom Verfahren ausgewählte Punkt mit

$$|f(\tilde{z}_{k_i}) - p_{k_i}(\tilde{z}_{k_i})| = \|f - p_{k_i}\|_E$$

ist, und sei p_{k_i+1} die Minimallösung an f auf N_{k_i+1} , so sei schließlich noch o.B.d.A. die Teilfolge $\{k_i\}$ so gewählt, daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{z}_{k_i} = \tilde{z}$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_i+1} = \tilde{p}$$

gilt. Hierbei ist $\tilde{z} \in E$ mit

$$|f(\tilde{z}) - p(\tilde{z})| = \|f - p\|_E$$

und $\tilde{p}$ ist Minimallösung an f auf $\hat{N} \cup \{\tilde{z}\}$. Es folgt auf Grund unserer Annahme weiter

$$\|f - \tilde{p}\|_{\hat{N} \cup \{z\}} > \|f - p\|_{\hat{N}} = \|f - p\|_N .$$

Andererseits gilt aber für $i = 1, 2, \dots$

$$\|f - p_{k_i+1}\|_{N_{k_i+1}} \leq \|f - p\|_N$$

und durch Grenzübergang $i \rightarrow \infty$

$$\|f - \tilde{p}\|_{\hat{N} \cup \{z\}} \leq \|f - p\|_N .$$

Das ist aber ein Widerspruch.

Somit ist gezeigt, daß jeder Häufungspunkt der Folge $\{p_k\}$ Minimallösung an f auf B_E bzgl. V_n ist. Da die Minimallösung eindeutig ist, besitzt die Folge $\{p_k\}$ genau einen Häufungspunkt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß natürlich alle drei Verfahren ohne Modifizierung dafür verwendet werden können, die Minimallösung aus V_n an Funktionen, die nicht holomorph im Innern des Einheitskreises, aber stetig auf dem Einheitskreis sind, bzgl. des Einheitskreises E zu ermitteln.

Abschließend geben wir noch fünf Beispiele an, die mit Hilfe des Aufstiegsverfahrens auf der Rechenanlage CD 3300 des Rechenzentrums der Universität Erlangen-Nürnberg berechnet wurden. In allen Beispielen starten wir mit einer äquidistanten Stützstellenverteilung. Als Ausgangsapproximation wählen wir die Minimallösung an die vorgegebene Funktion auf einer $(n+2)$ -elementigen Teilmenge dieser Stützstellen. Wir geben die ersten 5 signifikanten Ziffern der Ergebnisse an.

Beispiel 8.1:

Die Funktion

$$f_1(z) = \frac{z - .2 - .5i}{z - 2 - .9i}$$

soll auf B_E durch Polynome aus V_1 approximiert werden. Nach 9 Iterationen gelangen wir zu der Näherungslösung

$$\tilde{p}_1(z) = (-.39187 + .28396i)z + .17670 + .17047i$$

mit

$$\|f_1 - \tilde{p}_1\|_E = \|f_1 - \tilde{p}_1\|_{B_E} = .22068 \quad .$$

Die Minimallösung p_1 an f_1 auf B_E bzgl. V_1 ergibt sich mit Hilfe des Satzes 4.2 zu

$$p_1(z) = (-.39190 + .28397i)z + .17671 + .17047i$$

und es ist

$$\rho_{V_1}(f_1) = .22067 \quad .$$

Beispiel 8.2:

Die Funktion

$$f_2(z) = \frac{1}{z + 1.8 - 2.4i} + \frac{.5 - .8i}{z + 1.6 - .8i}$$

soll auf B_E durch Polynome aus V_1 approximiert werden. Nach 9 Iterationen gelangen wir zu der Näherungslösung

$$\tilde{p}_2(z) = (-.38158 - .10093i)z + .64814 - .014677i$$

mit

$$\|f_2 - \tilde{p}_2\|_{B_E} = .21199 \quad .$$

Es gilt weiter

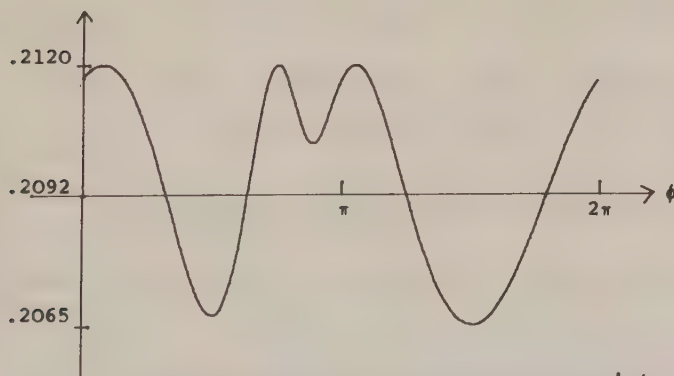
$$\rho_{V_1}^P(f_2) = .21190 \leq \rho_{V_1}(f_2) \leq .21199 = \|f_2 - \tilde{p}_2\|_{B_E}.$$

Hierbei ist $\rho_{V_1}^P$ die Minimalabweichung zu f_2 bzgl. V_1 auf der Punktmenge

$$P = \{z_\mu = z(\phi_\mu) = e^{i \cdot \phi_\mu}, \mu = 1, 2, 3\}$$

mit

$$\phi_1 = 2.4229, \quad \phi_2 = 3.31 \quad \text{und} \quad \phi_3 = 6.2362.$$



Graph von $|f_2(z) - \tilde{p}_2(z)|$ für $z = e^{i \cdot \phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

Beispiel 8.3:

Die Funktion

$$f_3(z) = \frac{1}{z + 1.8 - 2.4i} + \frac{.5 - .8i}{z + 3.6 - 2.2i}$$

soll auf B_E durch Polynome aus V_1 approximiert werden. Nach 14 Iterationen gelangen wir zu der Näherungslösung

$$\tilde{p}_3(z) = (-.024042 - .12226i)z + .40030 + .16699i$$

mit

$$\|f_3 - \tilde{p}_3\|_{B_E} = .035697.$$

Es gilt weiter

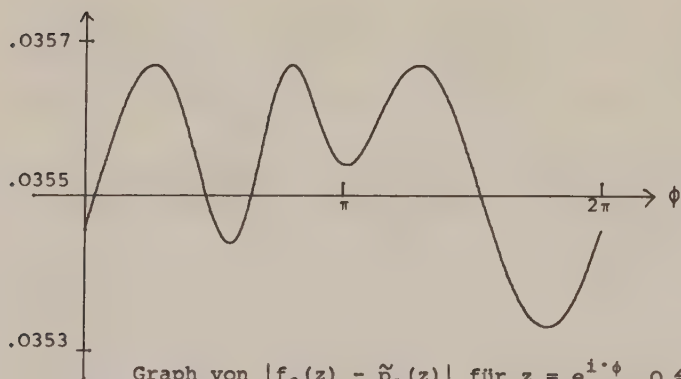
$$\rho_{V_1}^{\tilde{p}}(f_3) = .035676 \leq \rho_{V_1}(f_3) \leq .035697 = \|f_3 - \tilde{p}_3\|_{B_E}.$$

Hierbei ist $\rho_{V_1}^{\tilde{p}}(f_3)$ die Minimalabweichung zu f_3 bzgl. V_1 auf der Punktmenge

$$\tilde{P} = \{z_\mu = z(\phi_\mu) = e^{i \cdot \phi_\mu}, \mu = 1, 2, 3\}$$

mit

$$\phi_1 = .81341, \quad \phi_2 = 2.32317 \quad \text{und} \quad \phi_3 = 4.31791.$$



Beispiel 8.4:

Die Funktion f_1 soll auf B_E durch Polynome aus V_3 approximiert werden. Nach 24 Iterationen gelangen wir zu der Näherungslösung

$$\begin{aligned} \tilde{p}_4(z) = & (-.010462 + .100051i)z^3 + (-.086807 + .151461i)z^2 + \\ & + (-.31032 + .225021i)z + .17674 + .170511i \end{aligned}$$

und es ist

$$\|f_1 - p_4\|_{B_E} = .045898.$$

Die Minimallösung p_5 an f_1 auf B_E bzgl. V_3 ergibt sich mit Hilfe des Satzes 4.2 zu

$$p_4(z) = (.0098496 + .100131)z^3 + (-.086988 + .151611)z^2 + (-.31042 + .224931)z + .17672 + .170481$$

und es ist

$$\rho_{V_3}(f_1) = .045877 \quad .$$

Beispiel 8.5:

Die Funktion $\tilde{r}_n$ aus Beispiel 4.1 soll auf B_E durch Polynome aus V_3 approximiert werden. Nach 22 Iterationen gelangen wir zu

$$\tilde{p}_5(z) = (.29700 + .666621)z^3 + (.37496 + .624991)z^2 + (.37502 + .500011)z + .50001 + 2.499771$$

mit

$$\|\tilde{r}_n - \tilde{p}_5\|_{B_E} = .36387 \quad .$$

Die Minimallösung p_5 an $\tilde{r}_n$ auf B_E bzgl. V_3 ergibt sich nach Beispiel 4.1 zu

$$p_5(z) = (.29167 + .666671)z^3 + (.375 + .6251)z^2 + (.375 + .51)z + .5 + .251$$

und es ist

$$\rho_{V_3}(\tilde{r}_n) = .36384 \quad .$$

9. Ein hinreichendes Kriterium für rationale Approximation

In diesem Kapitel werden wir uns abschließend mit rationalen Approximationen an Funktionen $f \in H(B_E)$ bzgl. B_E beschäftigen.

Sei

$$W_m^n = \{w; w(z) = \frac{q_n(z)}{p_m(z)} = \frac{\sum_{j=0}^n \alpha_j z^j}{\sum_{i=0}^m \beta_i z^i}, \alpha_j, \beta_i \in \mathbb{C}\}$$

so gilt mit

$$M(w) = \{z; z \in E, |f(z) - w(z)| = \|f - w\|_E\}$$

der

Satz 9.1 (Meinardus [11]):

Es sei $f \in H(B_E)$ und $\tilde{w} \in W_m^n$. Gilt für jedes $w \in W_m^n$ die Ungleichung

$$\min_{z \in M(\tilde{w})} \operatorname{Re}(\overline{f(z) - \tilde{w}(z)})(w(z) - \tilde{w}(z)) \leq 0, \quad ,$$

dann ist w Minimallösung an f auf B_E bzgl. W_m^n .

Das Lemma 2.2 kann verallgemeinert werden zu

Lemma 9.1:

Es sei $G(r) = r \cdot e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < \pi$, eine Gerade durch den Ursprung

und $w = \frac{q_n}{p_m}$ eine rationale Funktion aus W_m^n mit $p_m(z) \neq 0$ für

$z \in E$. Durchläuft z die Werte des Einheitskreises, sei also

$z = z(\phi) = \cos \phi + i \cdot \sin \phi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, dann besitzt

$$H(\phi, r) = w(z(\phi)) - G(r)$$

maximal $2t$ Nullstellen, wobei $t = \max(m, n)$ ist.

Beweis:

Es ist

$$w(z) = \frac{q_n(z)}{p_m(z)} = \frac{q_n(z) \cdot \overline{p_m(z)}}{|p_m(z)|^2} = \frac{1}{|p_m(z)|^2} \cdot \sum_{j=0}^t (\gamma_j z^j + \tilde{\gamma}_j \bar{z}^j)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\gamma_j, \tilde{\gamma}_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, t$,
und insbesondere für $|z| = 1$

$$w(z(\phi)) = \frac{1}{|p_m(z(\phi))|^2} \cdot \sum_{j=0}^t \{ \delta_j \cos j\phi + \tilde{\delta}_j \sin j\phi + i \cdot (\kappa_j \cos j\phi + \tilde{\kappa}_j \sin j\phi) \}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\delta_j, \tilde{\delta}_j, \kappa_j, \tilde{\kappa}_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, t$.
Mit

$$u(\phi) = \sum_{j=0}^t (\delta_j \cos j\phi + \tilde{\delta}_j \sin j\phi) \text{ und } v(\phi) = \sum_{j=0}^t (\kappa_j \cos j\phi + \tilde{\kappa}_j \sin j\phi)$$

folgt

$$\begin{aligned} \arg\{w(z(\phi))\} &= \arg\left\{ \underbrace{\frac{1}{|p_m(z(\phi))|^2}}_{=0} \right\} + \arg\{u(\phi) + i \cdot v(\phi)\} \\ &= \arctan \frac{v(\phi)}{u(\phi)} \pmod{\pi} \quad \text{für } v(\phi) \neq 0 \neq u(\phi) . \end{aligned}$$

Wir machen die folgenden Fallunterscheidungen

(1) $w(z(\phi)) \neq 0$ für $0 \leq \phi < 2\pi$:

Der Beweis dieses Falles verläuft bei Berücksichtigung der
vorhergehenden Beziehungen analog dem Beweis des Lemmas 2.2.

(2) Es existiert mindestens ein $\tilde{\phi}$, $0 \leq \tilde{\phi} < 2\pi$, mit $w(z(\tilde{\phi})) = 0$:

q_n besitze die Produktdarstellung (wiederum o.B.d.A. $\text{grad } q_n = n$)

$$q_n(z(\phi)) = \alpha \cdot (z(\phi) - \tau_1)^{k_1} \dots (z(\phi) - \tau_s)^{k_s} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} (z(\phi) - \xi_v)$$

mit

$$\begin{aligned} |\tau_v| &= 1 \quad , \quad v = 1, 2, \dots, s \quad , \quad |\xi_v| \neq 1 \quad , \quad v = 1, 2, \dots, n-k, \\ \text{und } k_1 + k_2 + \dots + k_s &= k . \end{aligned}$$

Dann kann q_n wiederum dargestellt werden als

$$q_n(z(\phi)) = \left(\sin \frac{\phi - x_1}{2} \right)^{k_1} \cdot \left(\sin \frac{\phi - x_2}{2} \right)^{k_2} \dots \left(\sin \frac{\phi - x_s}{2} \right)^{k_s} \cdot T(\phi)$$

mit

$$x_v = \arg\{\tau_v\} \quad , \quad v = 1, 2, \dots, s$$

und

$$T(\phi) = (2i)^k \cdot \prod_{v=1}^s e^{i \cdot \frac{k_v(\chi_v + \phi)}{2}} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} (z(\phi) - \xi_v) \quad .$$

Somit folgt

$$w(z(\phi)) = \frac{(\sin \frac{\phi - \chi_1}{2})^{k_1} \dots (\sin \frac{\phi - \chi_s}{2})^{k_s}}{|p_m(z(\phi))|^2} \cdot T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))} \quad .$$

$T \cdot \overline{p_m}$ kann aber mit eindeutig bestimmten $\theta_v \in \mathbb{C}$, $v = 1, 2, \dots, \tilde{t}$, dargestellt werden als

$$T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))} = \sum_{v=0}^{\tilde{t}} \theta_v (\cos v\phi + i \cdot \sin v\phi) \quad ,$$

$$\tilde{t} = \max\left(\frac{k}{2} + n - k, m - \frac{k}{2}\right) = \max\left(n - \frac{k}{2}, m - \frac{k}{2}\right) ,$$

falls k gerade, bzw. als

$$T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))} = \sum_{v=0}^{\tilde{t}} \theta_v \left(\cos \frac{2v+1}{2}\phi + i \cdot \sin \frac{2v+1}{2}\phi\right) \quad ,$$

$$\tilde{t} = \max\left(n - \frac{k+1}{2}, m - \frac{k+1}{2}\right) \quad ,$$

falls k ungerade.

Der Rest des Beweises verläuft dann wieder analog dem Beweis von Lemma 2.2 .

Wir formulieren nun das hinreichende Kriterium.

Satz 9.2:

Es sei $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m^n$, und $\tilde{w} \in W_m^n$. Existieren $2t+2$ Werte ϕ_μ mit

$$0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{2t+2} < 2\pi \quad ,$$

wobei $t = \max(m+n, 2m)$ sei, so daß

$$|f(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))| = \|f - \tilde{w}\|_E \quad , \quad \mu = 1, 2, \dots, 2t+2 \quad ,$$

und mod 2π

$$\arg\{f(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))\} - \arg\{f(z(\phi_{\mu-1})) - \tilde{w}(z(\phi_{\mu-1}))\} = \pi$$

$$\mu = 2, 3, \dots, 2t+2 \quad ,$$

gilt, dann ist $\tilde{w}$ Minimallösung an f aus W_m^n bzgl. B_E .

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $\tilde{w}$ nicht Minimallösung aus W_m^n an f bzgl. B_E ist. Dann existiert nach Satz 9.1 mindestens eine rationale Funktion $w \in W_m^n$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))} (w(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))) > 0, \\ \mu = 1, 2, \dots, 2t+2.$$

Setzen wir

$$\arg\{f(z(\phi_1)) - \tilde{w}(z(\phi_1))\} = \theta \pmod{2\pi},$$

so muß - wiederum mod 2π - für $\mu = 1, 2, \dots, t+1$ gelten

$$\theta - \frac{\pi}{2} < \arg\{w(z(\phi_{2\mu-1})) - \tilde{w}(z(\phi_{2\mu-1}))\} < \theta + \frac{\pi}{2}$$

und

$$\theta + \frac{\pi}{2} < \arg\{w(z(\phi_{2\mu})) - \tilde{w}(z(\phi_{2\mu}))\} < \theta + \frac{3\pi}{2}.$$

Diese Bedingung kann aber - analog Satz 2.2 - ($w - \tilde{w}$) nur erfüllen, wenn ($w - \tilde{w}$) mindestens $2t+1$ Schnittpunkte mit der Geraden

$$G(r) = r \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}, \quad -\infty \leq r \leq \infty,$$

besitzt.

Es gilt aber

$$w - \tilde{w} = \frac{q_n}{p_m} - \frac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_m} = \frac{r_{m+n}}{s_{2m}} \quad \text{mit } r_{m+n} \in V_{m+n} \text{ und } s_{2m} = p_m \cdot \tilde{p}_m \in V_{2n}.$$

Somit besitzt $w - \tilde{w}$ nach Lemma 9.1 maximal $2t$ Schnittpunkte mit der Geraden $G(r)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Stellen wir an die Fehlerfunktion zusätzlich zu den Bedingungen des Satzes 9.2 die Forderung, daß ihr Betrag konstant ist, so ist die Minimallösung eindeutig. (Es werden später explizit Minimallösungen angegeben, die dem hinreichenden Kriterium und dieser zusätzlichen Forderung genügen).

Satz 9.3:

Es sei $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m^n$. Existiert eine rationale Funktion $\tilde{w} \in W_m^n$, so daß mit $t = \max(m+n, 2m)$

$$f - \tilde{w}$$

den Einheitskreis auf den $(t+1)$ -mal durchlaufenen Kreis mit dem Radius $r > 0$ abbildet, dann ist $\tilde{w}$ Minimallösung an f aus W_m^n bzgl. B_E mit der Minimalabweichung r und $\tilde{w}$ ist eindeutig.

Beweis:

Nach Satz 9.2 ist $\tilde{w}$ Minimallösung an f aus W_m^n bzgl. B_E und die Minimalabweichung zu f ist offensichtlich r .

Die Eindeutigkeitsaussage beweisen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, daß $w^* \in W_m^n$, $w^* \neq \tilde{w}$, ebenfalls Minimallösung an f ist. Dann gilt aber für $z \in E$

$$|w^*(z) - f(z)| \leq |f(z) - \tilde{w}(z)| = \|f - \tilde{w}\|_E.$$

Auf Grund des Satzes von Rouché (siehe z.B. Marden[10]) folgt, daß die Funktion

$$(w^* - f) + (f - \tilde{w}) = w^* - \tilde{w}$$

dieselbe Anzahl von Nullstellen im Innern des Einheitskreises wie die Funktion $f - \tilde{w}$ besitzt. Nach dem Argumentprinzip (siehe z.B. Marden[10]) besitzt aber $f - \tilde{w}$ genau $t + 1$ Nullstellen im Innern des Einheitskreises. Das ist aber ein Widerspruch, denn

$$w^* - \tilde{w} = \frac{q_n^*}{p_m^*} - \frac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_m} = \frac{q_n^* \cdot \tilde{p}_m - p_m^* \cdot \tilde{q}_n}{p_m^* \cdot \tilde{p}_m}$$

besitzt höchstens $n+m < t + 1 = \max(m+n, 2m) + 1$ Nullstellen.

Im folgenden geben wir explizit Minimallösungen aus W_1^1 bzgl. B_E an Funktionen aus einer gewissen Klasse R von rationalen Funktionen an. Hierbei sei R folgendermaßen definiert:

$$R = \{r; r \in \tilde{R}, r \text{ genügt den Beziehungen (9a), (9b) und (9c)}\}$$

mit

$$\tilde{R} = \{\tilde{r}; \tilde{r}(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_0}{(1 - \bar{\beta}_1 z)(1 - \bar{\beta}_2 z)}, \alpha_\mu, \beta_\nu \in \mathbb{C}, |\beta_\nu| < 1, |\beta_1 + \beta_2| < 1\},$$

und

$$(9a) \quad \alpha_1 \cdot \{\beta_1 \beta_2 (\overline{\beta_1 + \beta_2}) - (\beta_1 + \beta_2)\} = \alpha_0 \cdot \{1 - |\beta_1 \beta_2|^2\} \quad ,$$

$$(9b) \quad |\beta_1 + \beta_2| \cdot |1 - \overline{\beta_1 \beta_2}| > |\beta_1 \beta_2| \cdot (1 - |\beta_1 \beta_2|^2) \quad ,$$

$$(9c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Der Nullpunkt liegt im Innern der Ellipse} \\ \sigma(\phi) = -(\overline{\beta_1 + \beta_2}) + e^{\frac{i \cdot \theta}{2}} \{ |\beta_1 \beta_2| \cdot e^{i(\phi + \frac{\theta}{2})} + e^{-i(\phi + \frac{\theta}{2})} \} \quad , \\ 0 \leq \phi < 2\pi \quad , \\ \text{mit } \theta = \arg\{\beta_1 \beta_2\} - \text{also der Ellipse mit dem Mittel-} \\ \text{punkt } -(\overline{\beta_1 + \beta_2}), \text{ der gro\u00dfen Halbachse } 1 + |\beta_1 \beta_2|, \text{ der} \\ \text{kleinen Halbachse } 1 - |\beta_1 \beta_2| \text{ und dem Winkel } \theta/2 \text{ zwischen} \\ \text{gro\u00dfer Halbachse und x-Achse } -. \end{array} \right.$$

(Eine hinreichende Bedingung f\u00fcr (9c) ist beispielsweise

$$|\beta_1 + \beta_2| + |\beta_1 \beta_2| < 1 \quad).$$

Dann gilt der

Satz 9.4:

Es sei $r(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_0}{(1 - \overline{\beta_1} z)(1 - \overline{\beta_2} z)} \in R$. Dann existiert eine eindeutig

bestimmte rationale Funktion

$$w(z) = \frac{\gamma_1 z + \gamma_0}{1 - \overline{\delta} \cdot z} \in W_1^1 \quad ,$$

so da\u00df die Beziehung

$$(9d) \quad r(z) - w(z) = \xi \cdot \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2)(z - \delta)}{(1 - \overline{\beta_1} z)(1 - \overline{\beta_2} z)(1 - \overline{\delta} \cdot z)}$$

mit eindeutig bestimmtem $\xi \in \mathbb{C}$ erf\u00fcllt ist und w ist Minimal-
l\u00f6sung an r auf B_E bzgl. W_1^1 mit

$$\rho_{W_1^1}(r) = \frac{|\xi|}{|\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \delta|} \quad .$$

Beweis:

Es ist $reH(B_E)$. Somit fordern wir

$$weH(B_E), \text{ also } |\delta| < 1,$$

und können

$$u(z) := (1 - \bar{\beta}_1 z)(1 - \bar{\beta}_2 z)(1 - \bar{\delta} \cdot z) \neq 0$$

für $z \in E$ voraussetzen. Multiplizieren wir (9d) mit $u(z)$, so führt Koeffizientenvergleich zu dem Gleichungssystem:

$$(9e) \left\{ \begin{array}{l} \overline{\beta_1 \beta_2} \gamma_1 - \xi = 0 \\ -(\overline{\beta_1 + \beta_2}) \gamma_1 + \overline{\beta_1 \beta_2} \gamma_0 - \alpha_1 \bar{\delta} + (\beta_1 + \beta_2) \xi + \delta \xi = 0 \\ \gamma_1 - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) \gamma_0 - \alpha_0 \bar{\delta} - \beta_1 \beta_2 \xi - (\beta_1 + \beta_2) \delta \xi + \alpha_1 = 0 \\ \gamma_0 + \beta_1 \beta_2 \delta \xi + \alpha_0 = 0 \end{array} \right.$$

Setzen wir

$$v_1(\delta) = \overline{\beta_1 \beta_2} (\beta_1 + \beta_2) - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) + \overline{\beta_1 \beta_2} (1 - |\beta_1 \beta_2|^2) \cdot \delta$$

und

$$v_2(\delta) = 1 - |\beta_1 \beta_2|^2 + \overline{\beta_1 \beta_2} (\beta_1 \beta_2 (\overline{\beta_1 + \beta_2}) - (\beta_1 + \beta_2)) \cdot \delta,$$

wobei auf Grund unserer Forderung $|\delta| < 1$ und der Bedingung (9b) sofort

$$v_1(\delta) \neq 0 \quad \text{und} \quad v_2(\delta) \neq 0$$

folgt, so führt (9e) zu

$$\frac{\alpha_1 \bar{\delta} + \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \alpha_0}{v_1(\delta)} = \frac{\alpha_0 \bar{\delta} - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) \cdot \alpha_0 - \alpha_1}{v_2(\delta)}$$

und weiter zu

$$\begin{aligned}
 0 = & \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \{ \alpha_1 [\overline{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}] - (\beta_1 + \beta_2) \} - \alpha_0 [1 - |\beta_1 \beta_2|^2] \cdot \delta \overline{\delta} + \\
 & + \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \{ \alpha_0 [\overline{(\beta_1 + \beta_2)}] - \overline{\beta_1 \beta_2} (\beta_1 + \beta_2) \} + \alpha_1 [1 - |\beta_1 \beta_2|^2] \cdot \delta + \\
 & + \{ \alpha_0 [\overline{(\beta_1 + \beta_2)}] - \overline{\beta_1 \beta_2} (\beta_1 + \beta_2) \} + \alpha_1 [1 - |\beta_1 \beta_2|^2] \cdot \overline{\delta} + \\
 & + \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \alpha_0 (1 - |\beta_1 \beta_2|^2) + [\overline{(\beta_1 + \beta_2)} \alpha_0 + \alpha_1] \cdot [\overline{\beta_1 \beta_2} (\beta_1 + \beta_2) - \overline{(\beta_1 + \beta_2)}]
 \end{aligned}$$

und bei Berücksichtigung von Bedingung (9a) schließlich zu

$$\tau \cdot \{ \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \delta + \overline{\delta} - (\beta_1 + \beta_2) \} = 0$$

mit

$$\tau = \alpha_0 \cdot \{ (\overline{\beta_1 + \beta_2}) - \overline{\beta_1 \beta_2} (\beta_1 + \beta_2) \} + \alpha_1 \cdot (1 - |\beta_1 \beta_2|^2) ,$$

und somit zu

$$(9f) \quad \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \delta + \overline{\delta} - (\beta_1 + \beta_2) = 0 ,$$

da wegen Bedingung (9a) und (9b)

$$\tau \neq 0$$

ist. Wir setzen

$$\sigma(\delta) = \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot \delta + \overline{\delta} - (\beta_1 + \beta_2)$$

und

$$\delta = r \cdot e^{1 \cdot \phi} , \quad 0 < r < 1 , \quad 0 \leq \phi < 2\pi .$$

Lassen wir nun δ einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r durchlaufen, so beschreibt

$$\begin{aligned}
 \sigma(\delta) = \sigma(r, \phi) &= \overline{\beta_1 \beta_2} \cdot r \cdot e^{1 \cdot \phi} + r \cdot e^{-1 \cdot \phi} - (\beta_1 + \beta_2) \\
 &= r \cdot e^{\frac{1 \cdot \theta}{2}} \{ |\beta_1 \beta_2| \cdot e^{\frac{1(\phi + \theta)}{2}} + e^{-1(\phi + \frac{\theta}{2})} \} - (\beta_1 + \beta_2) ,
 \end{aligned}$$

wobei $\theta = \arg\{\overline{\beta_1 \beta_2}\}$ ist, eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $-(\beta_1 + \beta_2)$, der großen Halbachse $r(1 + |\beta_1 \beta_2|)$, der kleinen Halbachse $r(1 - |\beta_1 \beta_2|)$ und dem Winkel $\theta/2$ zwischen großer Halbachse und x-Achse.

Da weiter wegen Bedingung (9b)

$$\beta_1 \neq \beta_2 \quad , \quad \text{also} \quad (\overline{\beta_1} + \beta_2) \neq 0 \quad ,$$

gilt, folgt schließlich aus Bedingung (9c), daß ein $\delta \in \mathbb{C}$ mit $|\delta| < 1$ existiert, das der Beziehung (9f) genügt.

Die zweite Aussage folgt dann aber sofort aus Satz 9.2 und aus Satz 4.1.

Hierzu betrachten wir das

Beispiel 9.1:

Wir setzen

$$\beta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (1 - i) \quad , \quad \beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (1 + i)$$

und mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha_1 = -\frac{9}{4} \cdot \alpha \quad , \quad \alpha_0 = \alpha \quad .$$

Dann ist

$$\tilde{r}(z) = \frac{(-\frac{9}{4}z + 1) \cdot \alpha}{(1 - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}z)(1 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}}z)} \in \mathbb{R} \quad ,$$

und die rationale Funktion $\tilde{w} \in W_1^1$ bester Approximation an $\tilde{r}$ auf B_E bzgl. W_1^1 ergibt sich zu

$$\tilde{w}(z) = \frac{-\frac{16}{7} \cdot \alpha \cdot z - \frac{64}{63} \cdot \alpha}{1 - \frac{4}{9} \cdot z} \quad .$$

Wegen

$$\xi = \frac{2}{7} \cdot \alpha$$

folgt schließlich

$$\rho_{W_1^1}(\tilde{r}) = \frac{36}{7} \cdot |\alpha| \quad .$$

Literatur

- [1] Al'per, S. Ja.: Asymptotic Values of Best Approximation of Analytic Functions in a Complex Domain.
Uspehi Mat. Nauk 14 (1959) 131-134.
- [2] Blatt, H. P.: Stetigkeitseigenschaften von Optimierungsaufgaben und lineare Tschebyscheff-Approximation.
Bericht 013 aus dem Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen 1972.
- [3] Cartan, H.: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen.
BI-Hochschultaschenbücher 112/112a, Mannheim 1966.
- [4] Cheney, E. W.: Introduction to Approximation Theory.
McGraw-Hill Book Company, New York 1966.
- [5] Collatz, L. und W. Wetterling: Optimierungsaufgaben.
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
- [6] Duren, P. L.: Theory of H^p Spaces.
Academic Press, New York-London 1970.
- [7] Gutknecht, M.: Ein Abstiegsverfahren für gleichmäßige Approximation, mit Anwendungen.
Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich 1973.
- [8] Krabs, W.: Ein Verfahren zur Lösung gewisser nichtlinearer diskreter Approximationsprobleme.
ZAMM 52 (1972) 359-368.
- [9] Lorentz, G. G.: Approximation of Functions.
Holt-Rinehart-Winston, New York 1966.
- [10] Marden, M.: Geometry of Polynomials.
Amer. Math. Soc., Providence Rhode Island 1966.

- [11] Meinardus, G.: Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods.
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.
- [12] Newman D. J. und H. S. Shapiro: Some Theorems on Cebyshev Approximation.
Duke Math. J. 30 (1963) 673-682.
- [13] Poreda, S. J.: Estimates for Best Approximation to Rational Functions.
Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1970) 129-135.
- [14] Poreda, S. J.: On The Behavior of Best Uniform Deviations.
J. Approx. Theory 6 (1972) 387-390.
- [15] Rivlin, T. J.: Some Explicit Polynomial Approximations in The Complex Domain.
Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 467-469.
- [16] Rivlin, T. J. und B. Weiss: Some Best Polynomial Approximations in The Plane.
Duke Math. J. 35 (1968) 475-482.
- [17] Saff, E. B.: On The Zeros of The Error Function for Tschebyscheff Approximation on a Disk.
J. Approx. Theory 9 (1973) 112-117.
- [18] Shapiro, H. S.: Topics in Approximation Theory.
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
- [19] Walsh, J. L.: Interpolation and Approximation by Rational Functions in The Complex Domain.
Amer. Math. Soc. Colloquium Pub. 20, Providence Rhode Island 1965.
- [20] Zygmund, A.: Trigonometric Series I, II.
Cambridge University Press 1968.

Lebenslauf

Am 8. Mai 1942 wurde ich als Sohn des Redakteurs Walter Klotz und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Bröker, in Bochum (Westfalen) geboren.

Von 1948 bis 1952 besuchte ich die Volksschule und anschließend das humanistische Gymnasium Ernestinum in Celle (Niedersachsen), wo ich im Februar 1962 die Reifeprüfung ablegte.

Nach Ableistung meines zweijährigen Grundwehrdienstes bei der Bundeswehr begann ich im Wintersemester 1964/65 mit dem Studium der Mathematik an der Technischen Universität Braunschweig. Im November 1966 legte ich dort die Diplom-Vorprüfung und im August 1969 die Diplom-Hauptprüfung ab.

Vom 1. September 1969 bis zum 30. September 1970 war ich als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Rechentechnik der Technischen Universität Braunschweig bei Prof. Dr. H. Herrmann beschäftigt. Seit dem 1. Oktober 1970 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen-Nürnberg am Lehrstuhl von Prof. Dr. G. Meinardus tätig.

Seit März 1971 bin ich verheiratet.

